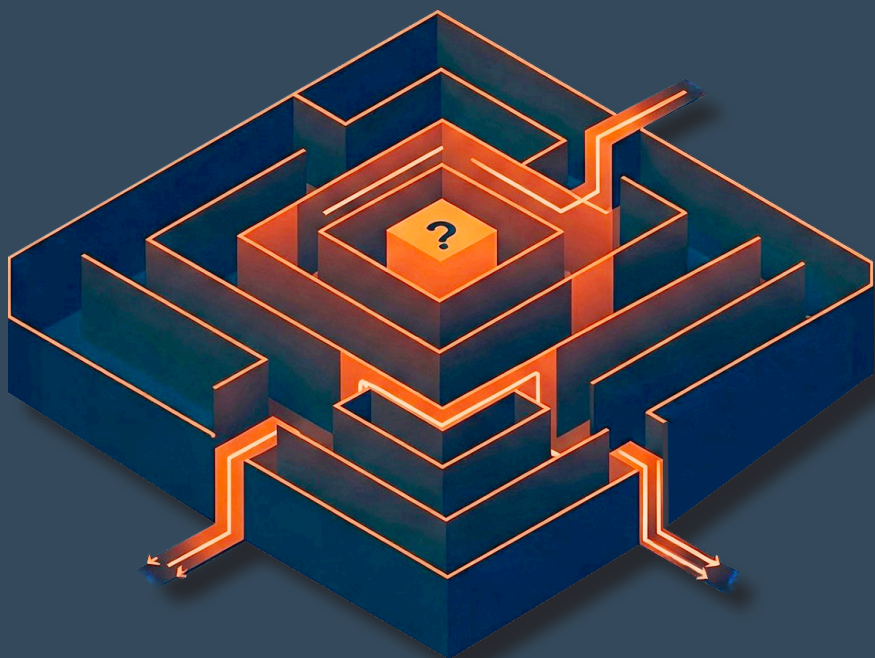


El error. El problema de los problemas

Conceptos psicomatemáticos confusos
en Educación Primaria y Secundaria (ESO)



Juan Antonio Cordero Alonso

Barcelona. 2025

JUAN ANTONIO CORDERO ALONSO

Nací en Astorga en 1954 y allí realicé mis estudios de Primaria y Secundaria. En 1974 obtuve la titulación de Profesor de EGB por la Universidad de León, y ese mismo año me hice cargo de mi primer aula. Un año después obtuve por oposición una plaza de profesor de Matemáticas y Ciencias de EGB en Barcelona, pero en 1976 interrumpí mi labor docente para cumplir con el servicio militar. Tras el obligatorio año de *mili* me reincorporé a mi puesto en la capital catalana, —que desde hace medio siglo es mi ciudad de adopción— y allí he continuado trabajando y estudiando.



En la UB obtuve la licenciatura en Psicología (1982) y cinco años después, el doctorado. Estos estudios fueron simultáneos a dos masters, de Pedagogía Terapéutica (MEC, 1982) y de Logopedia (Sant Pau, UAB, 1984).

De los cuatro decenios de mi vida laboral como docente, 15 años los cursé en un colegio de EGB, y tras conseguir por oposición la plaza de Psicología a Enseñanza Secundaria, pasé los restantes 25 en un instituto de la capital, donde me jubilé en 2014.

En todo este tiempo también impartí durante 18 años cursos de formación para TIC en Educación (profesorado de Primaria y Secundaria).

Las circunstancias sociales que provocó la pandemia de COVID me facilitaron el análisis de la gran masa de información generada en winmates.net, la web educativa que empecé a desarrollar en 1989, y en cuyas bases de datos fueron dejando sus respuestas y tiempos de reacción miles de alumnos españoles y de países hispanohablantes.

Este libro es el fruto de ese análisis.

El error. El problema de los problemas

EL ERROR. EL PROBLEMA DE LOS PROBLEMAS

JUAN ANTONIO CORDERO ALONSO

Barcelona, 2025

winmates.net

Diseño y maquetación: LALO F. MAYO

Imprime: Initium Lar

ISBN: 978-84-09-77100-4

Depósito Legal: LU 145-2025

Quedan reservados todos los derechos. El contenido de este libro no puede ser reproducido, ni total ni parcialmente, ni registrado, ni tramitado por sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia, o cualquier otro, sin el permiso previo y por escrito del editor.

El error. El problema de los problemas

**Conceptos psicomatemáticos
confusos en Educación
Primaria y Secundaria (ESO)**

Libro basado en las respuestas en la web educativa winmates.net (resolución de problemas) obtenidas por miles de alumnos de 6 a 16 años en decenas de miles de horas de trabajo sobre millones de problemas psicomatemáticos.

Juan A. Cordero Alonso

Barcelona, 2025

Índice

Prólogo	11	4. Análisis de los datos	71
1. Introducción	17	4.1. Aciertos, errores	71
1.1. Puntos de partida	17	4.2. Los tiempos de ejecución	73
1.2. Nuestra aspiración	21	4.3. Errores sistemáticos	77
1.3. Problemas y ejercicios	25	4.3.1. Distractores (Dis.246)	78
1.4. Problemas y currículo	29	4.3.1.1. Datos ocultos y/o literales (17)	79
1.5. El error como dato	31	4.3.1.2. Preguntas capciosas (89)	81
1.6. Matemáticas y vida	34	4.3.1.3. Confusores (33)	84
1.7. Literatura en RP	36	4.3.2. Conceptos erróneos (Edc.574)	88
1.8. Para no perderse	38	4.3.2.1. Conceptos cotidianos (267)	89
2. Metodología de trabajo	41	4.3.2.2. Seriaciones (116)	92
2.1. Web www.winmates.net	41	4.3.2.3. Uso de signos (69)	94
2.2. El software utilizado	45	4.2.3.4. Propiedades y operaciones (35)	96
2.3. Proceso de elaboración	48	4.2.3.5. Fracciones (39)	97
2.3.1. Terminología y Diagrama	48	4.2.3.6. Otros conceptos (48)	99
2.3.2. Obtención de las respuestas	50	4.3.3. Cálculo (Eob.284)	101
2.3.3. Depuración: Base2486	52	4.3.3.1. Suma (32)	102
2.4 La muestra	54	4.3.3.2. Resta (70)	104
2.5 La prueba diagnóstica	58	4.3.3.3. Producto (40)	105
3. Recogida de datos	59	4.3.3.4. Cociente (23)	106
3.1. Por cada clic dado	59	4.3.3.5. Conmutatividad errónea (25)	108
3.2. Respuesta y tiempo de reacción	62	4.3.3.6. Descolocación de cifras (65)	110
3.3. Categorización de respuestas	65	4.3.3.7. Decimal/entero (29)	112
3.4. Otras informaciones.	69		

4.3.4. Concepto en la operación (Fou.405)	114	5. Recapitulación	151
4.3.4.1. Sumar en vez de restar (42)	114	5.1 Nuestra pretensión	152
4.3.4.2. Restar en vez de sumar (43)	116	5.2 Las colecciones de problemas	153
4.3.4.3. Multiplicar en vez de dividir (55)	118	5.3 La obtención de datos	154
4.3.4.4. Dividir en vez de multiplicar (27)	120	5.4 Nos interesan más los errores	156
4.3.4.6. Otros tipos de confusión. (13)	122	5.5 Usuarios y destinatarios	157
4.3.4.7. Eliminar operaciones (99)	124	5.6 Categorías de problemas y de respuesta	158
4.3.4.8. Añadir operaciones (94)	126	5.7 Límites y alcance	159
4.3.5. Geometría (Geo.119)	127	5.8 Conclusiones	160
4.3.5.1. Punto, recta, plano (41)	128	5.8.1 Tiempo, dificultad y forma	161
4.3.6. Lógica (Log.51)	131	5.8.2 El efecto de los distractores	163
4.3.7. Multiplicativos y partitivos (Mpx.475)	133	5.8.3 Conceptos matemáticos erróneos	165
4.3.7.1. Doble (41)	133	5.8.4 Errores de cálculo	167
4.3.7.2. Triple (27)	135	5.8.5 Error en la operación	171
4.3.7.3. Otros, vecés (53)	136	5.8.6 Sobre la geometría	174
4.3.7.4. Mitad o medio/a (171)	137	5.8.7 Algo de lógica	176
4.3.7.5. Tercio o tercera parte (51)	138	5.8.8 Multiplicativos y partitivos	178
4.3.7.6. Cuarto o cuarta parte (101)	140	5.8.9 Sistema métrico y decimal	180
4.3.7.7. Otros: quinto, sexto... (31)	141	5.8.10 A modo de síntesis	181
4.3.8. Sistema Métrico y Decimal (Smd.332)	142		
4.3.8.1. Longitud (43)	143	6. Anexos	187
4.3.8.2. Peso (14)	144	6.1 Aclaración de términos	188
4.3.8.3. Volumen (19)	147	1. – Base6000	188
4.3.8.4. Sistema numérico decimal (256)	149	2. – Base2486	188
		3. – Bases de datos y tablas	189
		4. – Errores sistemáticos	189
		5. – Problemas y ejercicios	190
		6. – Resolución de problemas	191
		7. – winmates	191
		6.2 Cuadros y tablas utilizados	193
		7. Bibliografía	210

A Elena, mi esposa.

A mis hijos Juan Antonio y Elena, los primeros y más cercanos destinatarios de winmates.

A los miles de alumnos —algunos de ellos mis propios alumnos en el C.E.I.P. Puig Gairalt y el I.E.S. Apel·les Mestres, ambos de Hospitalet de Llobregat— que lo han utilizado y a los que siguen haciéndolo a lo largo de todo el mundo hispanohablante. Sin su trabajo, sin sus respuestas, nada habría que analizar, categorizar ni concluir sobre los errores en la resolución de problemas en este tramo de escolaridad básica.

Gracias a todos.

Aprender de los errores, también en matemáticas

Elena Cordero Fuertes

Licenciada en Física (UB, 2012)

Juan Antonio Cordero Fuertes

Licenciado en Matemáticas (UPC, 2006)

Las matemáticas constituyen una disciplina central para desenvolverse en el mundo en el que vivimos; y su importancia tiende a aumentar en un entorno dominado por la inundación de la información —las cifras, los precios, los porcentajes, las estadísticas, las probabilidades— y por la ubicuidad de ciencias y tecnologías cada vez más colonizadas —a veces engendradas— por el razonamiento matemático.

Sin embargo, su enseñanza sigue enajenando a buena parte de la población, y ello desde la más tierna infancia, que es el momento, además, donde los traspiés con las matemáticas y con su lógica resultan más difíciles de remontar. No se trata solode la dificultad o de la aridez de la materia, sino también de lo difícil que es motivar el interés de la abstracción, el rigor y el formalismo matemático —las ecuaciones y los sistemas, las longitudes, superficies y volúmenes de las figuras geométricas, las funciones— ante todos aquellos que no experimentan espontáneamente placer intelectual en el ejercicio, y no disponen de disciplina o confianza para perseverar en el esfuerzo hasta que este empiece a verse recompensado. Cualquier profesor, cualquier adulto que haya intentado alguna vez enseñar rudimentos de matemáticas a niños pequeños, sabe que no hay respuesta convincente a la pregunta *para qué sirve* tal o cual técni-

ca matemática de las que forman el programa de la enseñanza obligatoria. *Convincente*, claro está, a los ojos del niño abrumado por los detalles arbitrarios de soluciones a cuestiones que jamás se le han pasado por la cabeza: para qué sirve saber calcular el área de un triángulo isósceles del que solo conocemos la base y la altura; qué utilidad tiene el engorroso procedimiento —cuando intentas racionalizarlo, para explicarlo a un niño— que permite dividir números con decimales entre divisores de varias cifras.

Y sin embargo, la respuesta es obvia, si uno se espera lo suficiente a que esta se desvele, a medida que los años pasan y la mente del niño madura. Siempre se llega a algún sitio, hace decir el matemático Lewis Carroll a su sonriente gato de Cheshire, si caminas lo suficiente: las matemáticas, o más bien el razonamiento matemático que conecta y simultáneamente nutre disciplinas tan aparentemente dispares como la lógica, el álgebra, la geometría y el análisis, constituye, quizá, la herramienta intelectual más potente para dar forma comprensible a la realidad que nos rodea. O dicho en román paladino: las matemáticas sirven para comprender mejor nuestro entorno y resolver (algunos de) los problemas que aparecen en él.

Lo saben todos los estudiantes de cualquier carrera científica y técnica, como hemos sido los autores de estas líneas: las matemáticas son uno de los puntos de partida de la profundización académica en cualquier disciplina científica; el razonamiento matemático siempre es útil para comprender —y, por tanto, para transformar— una porción o un fenómeno de la realidad que nos rodea. No se incide siempre en las mismas matemáticas, y no en todas las disciplinas se requiere la soltura matemática con la misma intensidad, pero las nociones básicas de geometría o de estadística, de análisis (de cálculo) y de álgebra no son ajenas a los programas universitarios de Informática, de Química y de las varias Ingenierías, de Economía, de Psicología o de Biología. No hace falta haber estudiado Matemáticas o Física —por mencionar las carreras que con más profundidad se adentran, quizá, en el rigor de las ciencias exactas— para haber

observado la elegancia y la versatilidad de la manera matemática de ver el mundo.

No hace falta, pues, ser matemático para apreciar las matemáticas. Y desde luego, no hace falta dedicarse a las matemáticas para encontrarlas útiles en alguna dimensión de la vida, en muchos casos profesional, pero también en escenarios cotidianos: el interés de una hipoteca o la letra pequeña de un crédito, el cambio en una tienda, la oferta del supermercado, la altura de una puerta, los porcentajes de una encuesta, los botes de pintura para las paredes o los metros de parqué de una habitación, los gráficos en un telediario, las condiciones de una oferta de trabajo. El éxito en la lotería o en los juegos de azar.

Las matemáticas sirven para resolver problemas. Y a la inversa: resolver problemas sirve para entender la lógica subyacente de las matemáticas, más allá de las áridas recetas algorítmicas con las que a veces se confunde —la parte por el todo— la enseñanza de las matemáticas, sobre todo en las etapas obligatorias. La distinción entre *ejercicios* (aplicación mecánica de recetas) y *problemas* (situaciones complejas que pueden requerir la combinación de distintos algoritmos y abstracciones matemáticas), sobre la que este ensayo profundiza más adelante, tiene implicaciones profundas para el aprendizaje de las matemáticas. En ese sentido, la resolución de problemas es, quizá, una de las mejores aproximaciones posibles a la respuesta imposible del niño demasiado pequeño, y demasiado frustrado ante un formalismo aparentemente oscuro, rígido e inaccesible. Y si la resolución de problemas ayuda a apropiarse de la lógica matemática, el análisis de los resultados de la resolución de problemas por parte de un estudiante ayuda a comprender los patrones de su razonamiento; algo que resulta particularmente relevante, desde el punto de vista pedagógico, para comprender la emergencia de fallos de razonamiento y corregirlos eficazmente, incidiendo en los mecanismos cognitivos más frágiles y reforzando los contenidos y los conceptos más precariamente adquiridos.

Este es el punto de partida del trabajo de varias déca-

das en el que se basa este ensayo: el uso de la resolución de problemas como instrumento pedagógico capital para la enseñanza de las matemáticas en las etapas obligatorias de la enseñanza (entre los 6 y los 16 años). Y el objetivo es contribuir a iluminar las dificultades de los estudiantes a la hora de enfrentarse a estos problemas. Basándose en los datos obtenidos de la actividad telemática de miles de estudiantes, en distintas plataformas, de resolución de una base de miles de problemas matemáticos de dificultad creciente, a lo largo de toda la enseñanza obligatoria, este ensayo documenta, categoriza y analiza detalladamente la naturaleza y la genealogía de los errores cometidos por los estudiantes. El volumen y la representatividad de los datos analizados, los distintos contextos de su extracción, la naturaleza de los problemas estudiados y las metodologías de análisis son detallados más adelante. Las conclusiones resultantes de un análisis sobre un banco de pruebas de tanto alcance temporal (tanto por la edad de los estudiantes, como por el período de recolección de datos) como temático dentro del programa de matemáticas de las etapas obligatorias (cálculo, geometría, lógica, operaciones aritméticas, sistema métrico), resultan particularmente relevantes. Para todo profesional de la enseñanza de las matemáticas, desde luego; pero también para cualquiera que se haya interesado, por razones intelectuales o personales, por la adquisición de capacidades de razonamiento abstracto a edades tempranas — entre las que las competencias de comprensión y resolución de problemas matemáticos ocupan un lugar destacable.

* * *

Los problemas cuyos datos se examinan en este ensayo han sido realizados por estudiantes de entre 6 y 16 años, como indicábamos antes, en distintas plataformas telemáticas: las primeras, en el sistema de gestión de bases de datos dBASE III; las últimas, disponibles a través de la web www.winmates.net. Como hijos del autor que en su momento estuvimos

en ese rango de edad, los autores de estas líneas hemos sido no sololos *usuarios beta* de varias de estas plataformas, sino también, en algún sentido, los conejillos de Indias y el primer público objetivo del *software* de resolución de problemas que ha dado, más adelante, servicio a miles de alumnos, y servido de soporte a este estudio. Las sesiones de *problemas en el ordenador* aquí examinados, con sus tandas de veinte problemas, han formado parte de nuestro paisaje cotidiano durante años. También lo han sido, como para cualquier estudiante que se haya enfrentado a problemas matemáticos de este tipo, los momentos de frustración ante la penalización de errores y descuidos, de pereza, de satisfacción ante el esfuerzo recompensado.

El enfoque pedagógico subyacente, es decir, la concepción de la resolución de problemas como vector relevante para el aprendizaje de las matemáticas, ha jugado, pues, un papel fundamental en nuestro proceso de adquisición de competencias y refuerzo de capacidades matemáticas, cuyas dificultades se examinan aquí a través del estudio de los errores. A través de las sesiones de *winmates* y de sus antecesores, hechas con más o menos ganas, con más o menos tino, aprendimos no solo a resolver problemas, sino también a manejar la lógica matemática, a servirnos de ella y a pensar con ella; a ser más rigurosos, a disfrutar con las matemáticas y a educar y estimular con ellas la curiosidad propia de la infancia.

Animados por esas primeras experiencias, nuestra trayectoria posterior nos ha llevado a seguir adentrándonos en una mentalidad matemática que nos abrió la puerta a las disciplinas científicas y técnicas de nuestras carreras y entornos profesionales. Hemos sido parte del proyecto que aquí se documenta; y este largo proyecto pedagógico ha sido, también, parte de nuestra propia formación matemática y científica. Sirvan, pues, estas líneas como testimonio privilegiado y como homenaje a un esfuerzo que nos tuvo entre sus primeros (aunque no exclusivos) propósitos.

1. Introducción

1.1. Puntos de partida

Ha cambiado mucho la Educación en las últimas décadas, y mucho me temo que los recientes (y no tan recientes) planificadores del Sistema Educativo, sigan pensando que todo funciona igual que funcionaba cuando ellos eran estudiantes. Es decir, desde dentro del Sistema Educativo, da la impresión de que el último contacto que nuestros planificadores tuvieron con la Enseñanza fue su propia Enseñanza. Los cambios en el ámbito educativo han sido muy significativos en las últimas décadas.

Que la Secundaria sea obligatoria, no significa que la motivación de aprender en nuestros alumnos esté asegurada ni siquiera optimizada.

Que se garantice una plaza escolar en el Sistema Público, en momentos de fuertes cambios y crisis, significa que los niveles de conocimientos dentro del mismo aula pueden ser tan distantes que sea imposible explicar o hacer algo que interese a todos.

Que no exista una red paralela de enseñanza para alumnos que la requieran (por motivos de tipo intelectual, sensorial, comportamental o de conocimientos...) significa que una muy buena parte del Sistema Educativo Público tendrá que dejar sus niveles de exigencia, conocimientos, disciplina, etc. en caída libre.

Este es el punto de partida. Una escuela con unas diferencias interaula (intelectuales, de conocimientos, de aptitudes, de expectativas, de comportamiento y disciplina) tan enormes que, en la práctica, hacen casi inviable las tradicionales clases magistrales.

La deficiencia o falta de motivación de nuestros alumnos no es un tema menor. La respuesta de algunos expertos a la falta de motivación parece centrarse en hacer los contenidos matemáticos más atractivos, buscando sustituir el pensamiento y el trabajo por elementos lúdicos y visualmente agradables.

Los resultados evidencian un fracaso en la adquisición de conocimientos, a pesar del posible éxito en otros aspectos como el aprendizaje de los colores y la diversión, lo cual no se traduce en una mejora en el aprendizaje de los contenidos matemáticos, que es el objetivo principal.

Tradicionalmente las matemáticas han sido una disciplina considerada ardua, laboriosa y difícil, en parte por la abstracción y formalización que requieren, y en parte por la acumulación continua de métodos, destrezas y conocimientos que exige. Hace algunos años el alumno dedicaba un tiempo de trabajo, un estudio y un esfuerzo personal a cada hora de explicación del profesor.

En la actualidad, esta dedicación ha caído notablemente (cuando no desaparecido) y por tanto el esquema de la clase tradicional, que antes era válido incluso nuclear, ha perdido peso y en determinados casos significancia. La clase magistral se basa en avanzar cada día en nuevas explicaciones, nuevas ideas, nuevos métodos, etc, pero ello exige la digestión (al menos parcial) de los mismos en el tiempo libre de los alumnos y con su propio esfuerzo. Si este requerimiento no se cumple, la magistralidad no tiene sentido, se hace repetitiva, aburrida y anodina tanto para el profesor como para los alumnos. La clase magistral exige motivación e implicación de los alumnos, y sin motivación la clase magistral es una pantomima.

¿Qué hacemos durante 10 años de Escolaridad Obligatoria con alumnos no suficientemente motivados en el Área Matemática? ¿Están verdaderamente priorizados y ajustados los contenidos matemáticos del periodo? ¿Cómo organizar el trabajo y ritmo de una clase con unas diferencias de conocimientos, de aptitud y de motivación tan enormes? ¿Qué cambios en la estructura y forma de trabajo de los contenidos necesita el Sistema? ¿Cuál es la prioridad y el foco para fijar los contenidos importantes del periodo? ¿Cómo optimizar la dedicación para lograr la adquisición de competencias instrumentales básicas y útiles para la vida? ¿Realmente se puede aprender matemáticas renunciando al esfuerzo? ¿Hasta que edad se puede sustituir aprendizaje por juego?

No tengo la sensación de que estos interrogantes hayan sido planteados de forma seria por nuestros responsables educativos. Son cuestiones pegadas a lo concreto, a la situación vivida en las aulas, en los pasillos de los centros, no en los departamentos administrativos tan burocratizados como blindados contra la realidad.

La Resolución de Problemas (RP en adelante) debería constituir el núcleo a partir del cual poder planificar, establecer y secuenciar todos los currículos de la Enseñanza Obligatoria, Primaria y ESO, es decir el periodo escolar entre los 6 y los 16 años.

Esta idea se va abriendo hueco en un espacio donde los Profesores y los Departamentos de Matemáticas tienen una gran inercia y una gran resistencia que protege el sistema actual frente al cambio. Esperemos que la entrada de nuevo profesorado de matemáticas vaya facilitando la transición de un modelo básicamente magistral a otro donde la actividad del alumno tenga su sitio dentro del Aula.

El matemático G.H. Wheatley nos dio una descripción muy simple y ocurre de la RP (*Problem Solving* en inglés). Decía que *La resolución de problemas es lo que haces cuando ya no sabes qué hacer*. Y añadía... *el Problem Solving, es una metodología completa para la resolución de problemas*.

El aumento de peso específico y obviamente de tiempo de dedicación a

favor de la RP conlleva un cierto reajuste en la distribución de los tiempos dedicado por el profesorado a cada una de las disciplinas matemáticas (cálculo, espacio, etc...) y lo que es más difícil, reajuste en las actividad/pasividad del alumno/profesor dentro del Aula, a la hora de clase.

La RP en el Aula es un herramienta activa para el alumno que se puede traducir en aprendizaje efectivo si el alumno trabaja en el nivel de dificultad adecuado a su maduración y a sus conocimientos. Vigotsky denomina esta situación educativa como Zona de Desarrollo Potencial y tal vez este concepto sea uno de los pilares básicos del Pensamiento Cognitivo, tan maltratado por nuestros Pedagogos Oficiales, más transmisores de recetas que expertos en conocimiento real.

Ciertamente, la totalidad de los currículos matemáticos de la Enseñanza Obligatoria no pueden ser abordados desde la RP. Ciertamente. Existe una parte de destrezas, conocimientos y habilidades algorítmicas que también han de ser trabajadas que caen fuera de la RP, al menos, entendida como aquí la entendemos (álgebra, geometría-espacio, trigonometría...).

Una parte de la población estudiantil, y posteriormente profesional, necesitará amplios conocimientos matemáticos y la formación de estos futuros profesionales necesita algo más que RP. Necesitarán trigonometría, saber derivar e integrar, conocimientos cada vez más profundos de Álgebra... Serán matemáticos, ingenieros, físicos, arquitectos, etc. Pero será un porcentaje muy minoritario de la población general. No tiene sentido ni negar a estos pocos la preparación que necesitarán para su futuro como profesionales con elevados conocimientos matemáticos, ni tampoco que la mayoría de los alumnos tengan que estudiar los inicios de este complejo y difícil estudio matemático.

Las pruebas PISA nos informan cada tres años de que las deficiencias matemáticas fundamentales de nuestros alumnos no son, pongamos por caso, el desconocimiento de cuál es el coseno de 60, sino la incapacidad de resolver un problema cotidiano que necesite usar porcentajes o proporciones, de interpretar el significado de un gráfico o extraer información útil de un cuadro de doble entrada. Este es el problema de nuestros alumnos. Y este es el problema, no por esas deficiencias respecto a los currículos de la ESO, sino porque estos conocimientos, con todas las variables que se pueda uno imaginar, van a tener que utilizarlos de forma reiterada a lo largo de su vida cotidiana (hipotecas, descuentos en la compra, pagos aplazados, coger un tren o avión, entender un contrato salarial, decidir entre varias opciones posibles...). Y no tener este tipo de habilidades, de alguna manera, puede significar exclusión socio-laboral.

Es por esto que deberíamos reordenar las prioridades en lo que respecta a los currículos matemáticos dando entrada a la RP en tanto en cuanto nos

permite que alumnos con distintos niveles dentro del mismo aula puedan trabajar a su ritmo, partiendo de su propio nivel de conocimientos.

En este caso, la tarea básica del Profesor será ir ayudando a cada alumno a resolver los pequeños obstáculos que vayan surgiendo problema a problema, más que dándole respuesta, reformulando preguntas, teniendo en cuenta que el exceso de ayuda y el facilismo es contraproducente en el terreno del aprendizaje. El aprendizaje es un continuo ponerse de puntillas para acercarnos al saber, al conocimiento.

Sin esfuerzo y sin constancia, no hay aprendizaje.

1.2. Nuestra aspiración

Existe bastante literatura científica sobre el aprendizaje de los contenidos matemáticos, cálculo, adquisición del pensamiento matemático, evolución de conceptos, etc, dentro de la Psicología.

Unos trabajos enfatizan la dificultad intrínseca del pensamiento matemático, otros abordan el problema desde una óptica neurofisiológica, otros psicológica, etc.

Seguramente todos estos enfoques, y otros muchos, tengan un peso importante en el estudio de las deficiencias de aprendizaje matemático.

Seguramente el tema nunca quede totalmente explicado ni exista una Teoría Global sobre las dificultades matemáticas, sino distintas valoraciones complementarias, resultantes de distintos enfoques posibles.

Con el presente trabajo tan solo aspiramos a aportar una visión distinta acerca del aprendizaje matemático basado en la RP, más concretamente, en los resultados obtenidos en RP por alumnos de Enseñanza Obligatoria, es decir, el tramo de 6 a 16 años.

Los supuestos de partida son que el alumno sabe leer y tiene conocimiento de la operatoria básica. Nuestro trabajo será una reflexión de por qué determinados problemas, a priori de baja dificultad, son fallados por alumnos que, en principio, no presentan serias dificultades de aprendizaje, es decir, cuyas dificultades de aprendizaje están más relacionadas con su falta de trabajo que con su incapacidad psicológica o intelectual.

Intentaremos mostrar por qué un problema o tipo de problemas es fallado de forma no excepcional por los alumnos, e intentaremos explicitar cuál es el mecanismo mental que lleva al alumno al error. Se espera que este trabajo contribuya a esclarecer las deficiencias del sistema educativo, para que las autoridades competentes puedan tomar las medidas necesarias.

Cuando se mira atrás y se intentan recomponer 40 años de experiencia profesional, aparte de la experiencia se filtran otras sensaciones. Recuerdos, apuntes, asociaciones, etc, se mezclan con otras ideas más difícilmente descriptibles: el pasado y la nostalgia, que casi siempre van de la mano. Cómo volver al pasado sin sentir algo de nostalgia cuando la memoria, sabiamente, va eliminando los zarpazos y dentelladas dejando a flote los logros sin los sacrificios, los éxitos sin los fracasos, la rosa sin las espinas, etc.

Además de la nostalgia por el pasado, existen otras razones para emprender esta tarea de recopilación y análisis.

Los muchos años de creación, práctica y uso de un material pensado para ayudar al aprendizaje matemático en los niveles básicos, los miles de horas de generación de software y gestión de datos, los miles de alumnos y los cientos de miles de problemas resueltos (bien o mal) bien se merecen un

broche y no una salida sin despedida, un abandono, una huida por la puerta de atrás.

Hay también un deseo de que esta experiencia pedagógica, muy interesante desde mi punto de vista (personal y profesional) e interesante para quienes han sido los protagonistas puntuales o asiduos (algunos a lo largo de varios años) no muera del todo. Un deseo de que algo quede escrito y fe-dateado como útil para algunos alumnos, para algunos padres, para algunos profesores.

Cosas que tal vez no sabíamos sobre los errores que cometen los alumnos o que sabíamos pero no teníamos cuantificadas, conceptos que dábamos por comprendidos y asimilados cuando no lo estaban tanto, procesos mentales que pueden aclarar respuestas que parecen incomprensibles porque están ocultas bajo supuestos y lagunas de aprendizaje que no estaban contabilizados, etc.

Soy consciente de que nuestro material de RP no es el más lúdico ni el más colorista ni el más motivador del mundo. Ni nunca lo pretendimos. Partimos de que el aprendizaje no tiene por que ser divertido de entrada y eso nos diferencia de la gran corriente pedagógica moderna del *aprender jugando y sonriendo*. Si puntualmente puede serlo, perfecto. Sería un valor añadido. Pero si no, es igual, hay que seguir aprendiendo. El que quiera jugar tiene muchos espacios o lugares en Internet donde poder hacerlo. El que quiera aprender tiene menos espacios, pero también tiene derecho a ellos.

En su momento, hace unos 20 años, ofrecí todo este material a los responsables educativos de las Comunidades Autónomas del Reino de España. En alguna se me contestó que no estaba escrito en la lengua vehicular del aprendizaje y no me resisto a excitar su imaginación mientras adivinan cuál de ellas fue. Otra me contestó que le parecía interesante la propuesta pero exigía pasar a ser integrada totalmente en el programa educativo de la Comunidad, sin recibir a cambio ni un solo euro ni un mínimo reconocimiento de la cesión, es decir, entregar carros y carretas y desaparecer sin saber cómo iba a utilizarse ni tan solo si iba a utilizarse. Y la mayoría de ellos ni tan siquiera acusaron recibo de haber recibido el documento.

La ausencia de clases presenciales los últimos meses del curso 2019–20 y seguramente los primeros del 2020–21 exigirá reforzar formas alternativas de aprendizaje.

El tele aprendizaje, la educación a distancia y el software educativo se están abriendo una vía dentro del gran negocio (sobre todo editorial) de la enseñanza obligatoria donde lo que prima es el modelo de usar y tirar (fichas de un solo uso, libros de texto que se vuelven inservibles tras su uso individual, etc.).

Tal vez estemos ante el ocaso de un modelo de aprendizaje, el actual,

muy caro y obsoleto porque no se aprende lo que dice enseñar y tampoco se aprende (o se aprende de manera manifestamente mejorable) lo otro, la educación, la solidaridad, el respeto, la tolerancia, etc, etc.

Si es posible aprovechar una experiencia que ha sido, al menos parcialmente, beneficiosa, creo que es un deber hacer *eso posible* para conseguirlo.

Estos momentos delicados que vivimos afectan lo sanitario, pero también lo social. Los centros docentes permanecen cerrados desde hace varios meses. El tiempo va pasando y el parón académico en el aprendizaje de nuestros alumnos, disfrazado de hiperactividad tecnológico-digital de emails y teleconferencias, debería evitarse en la medida de lo posible.

Es deseable que las administraciones educativas presten atención a los centros docentes, considerándolos como la unidad fundamental del sistema educativo, con sus alumnos y profesores como el centro de su labor.

Ojalá puedan dejar de lado el frentismo, el uso y abuso de la educación, las disputas políticas, las ambiciones de poder, la mediocridad y el desinterés por el conocimiento y el aprendizaje infantil.

También se ofrece esta experiencia a todas aquellas organizaciones que estén preocupadas por el aprendizaje matemático a través de la resolución de problemas. La reducción de la presencia física, el teletrabajo, el teleaprendizaje, etc, han de ir haciéndose un hueco poco a poco. Esta contribución representa nuestro esfuerzo por aportar al campo de estudio.

Todos aquellos que vayan a contracorriente de la pedagogía mágica de aprendizaje lúdico que nos hemos dado donde la diversión tiene más peso que la formación y adquisición de conocimientos, los que creen que el aprendizaje requiere esfuerzo para que sea consistente, los que apuesten por el trabajo riguroso como el camino más recto hacia la autoestima, etc., tendrán en este trabajo un espacio protegido o al menos un punto de referencia.

El mencionado broche exige un nuevo esfuerzo para recoger cantidades importantes de datos, depurarlos, contrastarlos, ordenarlos, jerarquizarlos, analizarlos y presentarlos con un cierto equilibrio de no ser demasiados pero tampoco demasiado pocos, de no abundar en el detalle sin llegar a eliminarlos, de no concluir con contundencia sino con una cierta distancia.

No se trata de un experimento con control absoluto de sujetos, variables y método. Nuestro trabajo consiste más bien en la obtención de datos a partir de una motivación explícita del alumno (la menor de las veces) o del tutorando (padres/profesores, lo más frecuente). Y en este tipo de trabajos, digamos de campo, proceden esas tareas de filtrado de las que hablamos.

Iremos comentando los pasos de más interés en la depuración a lo largo de los capítulos posteriores.

Gracias a todos los intervinientes. En primer lugar a los alumnos regis-

trados y también a los anónimos ya que muchos de ellos han pasado largas y tediosas sesiones de tandas de problemas. También a las madres y los padres (no es un tema de filosofía de género sino de frecuencia estadística) porque buscaban para sus hijos lo que el colegio no le estaba facilitando o solo se lo facilitaba parcialmente, y por supuesto a todo el profesorado que ha creído y utilizado este refuerzo del aprendizaje de la matemática obligatoria.

Muchas gracias a todos.

1.3. Problemas y ejercicios

Es posible que no siempre resulte tan obvia la diferencia que existe entre la Resolución de un Problema (RP) y la ejecución mecánica de unas tareas secuenciadas para la obtención de una respuesta como puede ser hacer una resta u otra operación cualquiera.

En el primer caso, más complejo y menos automatizable, tenemos normalmente un texto (oral o escrito) que envuelve unos datos que pueden estar presentes, ocultos, implícitos e incluso ser falsos o irrelevantes.

Al contrario que el ejercicio, algoritmo o aplicación regular de unas determinadas normas más o menos complejas, pero invariables, el problema exige una buena comprensión lectora del texto, una búsqueda y análisis de los datos y también una determinada capacidad calculatoria o algorítmica sobre dichos datos.

Muchas veces se utilizan *problema* y *ejercicio* de forma indistinta, como sinónimos, pero presentan diferencias y matices importantes. Una ligera revisión de las aportaciones diferenciadoras de ambos puede ser útil para deslindar perfectamente el significado de dichos conceptos

Distintos autores han reflexionado y estudiado sus diferencias y a continuación mostramos una síntesis de las aportaciones, conclusiones y diferencias a que han llegado.

Acerca de los Problemas:

Para Polya (1961), *...abordar un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata.*

Krulik y Rudnikf (1980) piensan que: *Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma.*

Kantowski (1977), piensa que: *Una tarea es un problema para un alumno si implica una pregunta que no sabe responder o una situación que es incapaz de resolver usando los conocimientos que tiene inmediatamente disponibles. En el caso del ejercicio, el alumno conoce el funcionamiento de un algoritmo y su aplicación correcta le llevará con seguridad a la solución o soluciones concretas.*

Según Mazarío (2002), *La presencia de una situación desconocida para el sujeto, no se conoce la vía de solución, la persona que se enfrenta a ella está motivada para trabajar en él, y se poseen los elementos necesarios para darle solución.*

De Guzmán, (1991). *Un problema es cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conozco el camino que me puede llevar.*

Acerca de Ejercicios

Consiste en trabajar sobre cierto número de ejemplos idénticos o casi idénticos a los que ha resuelto en clase el profesor o se han explicado ya en el texto, es decir, situación que plantea una cuestión matemática cuyo método de solución es inmediatamente accesible al sujeto que intenta responderla, porque dispone de un algoritmo que relaciona lo que se da (datos) y lo que se pide.

Llivina (1998) *Aquella exigencia para actuar donde la vía de solución es conocida para el estudiante.*

Jiménez, (2000), un ejercicio matemático tiene las mismas características que un ejercicio físico. Es el uso repetido de destrezas (calistenia) tal que ellas [las destrezas] se desarrollen, sean retenidas, y sean puestas a tono. Un cantante practica la escala musical para tener precisión en el tono; un atleta trota para mantenerse en forma; un alumno hace ejercicios matemáticos para mantener e incrementar sus habilidades.

Dwyer y Elligett, (1970). Un ejercicio matemático, corresponde a: *Una situación conocida, que es accesible para el sujeto y que es solucionable a través de una secuencia de pasos o algoritmo matemático ya conocido.*

Hay otros autores y bastantes más acotaciones conceptuales, pero pensamos que con las anteriormente mencionadas tenemos más que suficiente para dejar clara la diferencia y justificar la prioridad de nuestra opción, la RP. Tal vez añadir a todo lo anterior la presencia de texto (algunos alumnos les denominan problemas con palabras) y las derivadas de comprensión, lectura, etc, que van a entrar en juego.

Lectura comprensiva, matemáticas y resolución de problemas. Este es el eje sobre el que giran la mayor parte de las dificultades existentes en la RP. La vieja dicotomía Ciencias–Letras que rompe la realidad, las realidades, con dos enfoques antitéticos, contradictorios, parece que sirve a ambos polos por igual, despreciando uno del otro cuanto ignora, como refleja Machado en Abel Martín.

Tal vez sea el momento de plantear que el conocimiento de las cosas no se pueda abordar desde perspectivas contrarias sino complementarias. El lenguaje debería ganar en precisión y las matemáticas en extensión. Ninguna de ambas abarca más por sí sola que fusionada con la otra. No se trata de mundos aparte sino de partes de un todo que se deberían tratar de integrar, en aras al conocimiento, a su profundización, a la superación de las *capillitas* más típicas de tiempos medievales.

El lenguaje, o su ausencia, es una parte del problema de las matemáticas básicas en RP y las matemáticas, o su ausencia, están en la base de errores de interpretación por falta validación y contraste con lo real. No es bueno presumir de no saber nada de números como tampoco lo es recrearse en el desconocimiento del lenguaje no abstracto, lógico o formal.

La tarea de los alumnos en RP en concreto y en el aprendizaje en general, de forma más amplia, pasa por un proceso de análisis inicial de la situación que pasa forzosamente por la lectura comprensiva y por otro de síntesis final que revisa, certifica y valida el trabajo realizado. Análisis es comprender y síntesis es contrastar. Esos dos polos han de unirse, o al menos, hay que intentarlo.

Existen distintas aproximaciones resolutorias, más o menos intuitivas y/o empíricas, etc, para cada problema, y para cada alumno pueden existir diferentes formas de obtener la respuesta. Y esta estrategia de RP es mucho más rica que la aplicación mecánica de un algoritmo, pues implica crear un contexto donde los datos guarden una cierta coherencia. Desde este análisis se han de establecer jerarquías: ver qué datos son prioritarios, rechazar los elementos distorsionadores, escoger las operaciones que los relacionan, estimar el rango de la respuesta, etc. (Cordero 1999).

Resumiendo. Hay una diferencia básica entre el concepto *problema* y *ejercicio*. No es lo mismo hacer un ejercicio que resolver un problema. Una cosa es aplicar un algoritmo de forma más o menos mecánica, evitando o superando las dificultades que introduce la aplicación de reglas cada vez más complejas, y otra, resolver un problema, dar una explicación o respuesta coherente a un conjunto de datos relacionados dentro del contexto o situación. La respuesta suele ser única, pero la estrategia resolutoria está influenciada por variables de contexto y es más diversificada que la aplicación mecánica estricta, más cercana a factores de tipo evolutivo, madurativo u otros.

En base a lo anteriormente comentado, dentro de la RP podemos tener, al menos, tres perspectivas diferentes, las derivadas de la comprensión lectora del texto en cuestión, las de discriminación y uso de los datos relevantes y las de ejecución mecánica de la tarea.

Las tres son importantes en sí mismas aunque a veces se pueden combinar negativamente y generar respuestas a simple vista incomprensibles o aleatorias, pero que observadas con más atención no lo son tanto.

Los errores de comprensión lectora están muy presentes en un mundo dominado por la imagen y el color, donde el texto escrito ha de caber en 144 caracteres y donde los emoticonos han sustituido y esclerotizado el rico mundo de las emociones hasta transformarlas en otro producto *prêt-à-porter* en nuestra nueva colección de emojis, al lado de la de nuestros zapatos.

La migración de la antigua página del libro hacia la pantalla multicolor nos ha hecho adoradores de la imagen y el video en detrimento de la más lenta y trabajosa tarea de leer. Pero la falta de ejercitación lectora paga su precio en la comprensión de textos, amplitud de vocabulario, profundidad de los conceptos y seguramente también de los pensamientos, aunque este

es otro tema.¹ Existen muchos conceptos, asociados a datos implícitos en nuestros problemas, que son usados cotidianamente pero cuyo significado, detalles de uso o precisión están muy por debajo de lo deseable. No siempre se asocia semana a 7 días, pares a conjuntos de 2, semestre a 6 meses...

Por último, existen muchos errores en la operatoria básica² que sobrepasan lo estimable y lo razonable. Algunos de ellos son tan elaborados que parece que es mucho más difícil cometer el error que ejecutar la operación correctamente.

Todo ello lo iremos viendo en su momento.

Ciertamente todos son errores, pero no todos ellos son equiparables. El error, es decir la diferencia entre la respuesta dada y la correcta, es una primera información acerca de quien lo comete, pero no es la única y seguramente tampoco la más importante.

A ese primer vistazo del error pueden asociarse variables evolutivas o personales del alumno que son muy interesantes a la hora de aproximarse a sus procesos de pensamiento y decisión frente al problema.

-
1. Para más información sobre este apasionante tema de relaciones entre Pensamiento y Lenguaje pueden consultarse los trabajos de Luria y Vigotsky, y también los de Brunner o Piaget.
 2. Nos referimos a la operatoria básica de las cuatro reglas: suma, resta, producto y cociente con sus errores, comunes o específicos. Ahí caben los fallos considerados normales, los que afectan a las tablas de multiplicar, a la colocación respetuosa de las cifras en suma y resta, a la no conmutatividad de la resta y el cociente, etc.

1.4. Problemas y currículo

Hace ya más de 30 años comencé a elaborar algunas colecciones pequeñas de problemas, originariamente pensados para que mi hijo mayor comenzara a foguearse en el terreno de las matemáticas. Supongo que todo ello fue posible gracias a una deformación profesional por mi parte.

Poco a poco, y en paralelo con sus estudios de EGB, las colecciones de problemas fueron creciendo y diversificándose. Él iba haciendo sus problemas, que llamábamos tanda (entre 10 y 15 problemas) y que formaban, sin grandes traumas, parte de sus deberes diarios.

Eran finales de los 80 y comenzaba a popularizarse el uso de los ordenadores: Spectrum, Amstrad... No trabajábamos en papel sino sobre el ordenador con código programado por mi mismo en Basic, ex-profeso, que mostraba secuencialmente los problemas y grababan las respuesta introducida.

Cada cierto tiempo revisaba las respuestas y ampliaba el repertorio de problemas creando otros similares, pero con distinta dificultad, para cada uno de los que él había fallado. Pretendía reforzar aquellos aspectos que iban resultando más dificultosos en el aprendizaje.

Eso duró varios años. La colección ya pasaba de 2000 problemas agrupados por categorías, jerarquizados y listos para ser usados también en un Aula con ordenadores.

Aparecen las primeras dotaciones de ordenadores para colegios e institutos y la posibilidad, no exenta de dificultades pero aprovechada, de llevar al aula informativa de mi centro todo aquello que había ido recopilando a lo largo de varios años. Fue una experiencia muy interesante.

La RP informatizada, con bases de datos cada vez más amplias y software más robusto, con dos o tres alumnos por ordenador, 20 horas de funcionamiento a la semana, con cientos de alumnos trabajando y cientos de miles de problemas resueltos. La técnica, ampliada, era similar a la de años atrás, aunque con variaciones sustanciales relativas al ritmo, volumen de datos y de análisis. Nuevos problemas que debían de cubrir la mayor parte del currículo de nuevos cursos, etc. Y así hasta llegar a construir una base de 6000 problemas, teóricamente 600 para cada uno de los 10 cursos de la Enseñanza Obligatoria, es decir, seis de Primaria y cuatro de ESO. Una base diversificada y continua de dificultad con 6000 problemas que se sincronizaba con los *aprendizajes psicomatemáticos elementales*, —parafraseando a Isaac Asimov³— que los alumnos debían adquirir a lo largo de su enseñanza obligatoria. Y la medida y ritmo de estos aprendizajes se observaba a través del análisis de los errores cometidos.

3. Asimov, Isaac, *El fin de la eternidad*, Orbis, 1971.

Es cierto que no todos los contenidos programados a lo largo de dichos cursos tienen su correlato en la base de problemas. No sé si ello es posible aunque sí me consta que es muy difícil cumplir dicho objetivo en áreas como la geometría, demostraciones, etc. sobre todo relativas a los últimos cursos de la ESO. Con todo, resolver con soltura y aceptablemente los problemas asignados a cada curso significa dominar los contenidos globales del área matemática al menos en un 80%.

Por otra parte, la dinámica de RP dentro del aula informática nos permite un trabajo casi totalmente adaptado al nivel de madurez y/o conocimiento de cada alumno o grupo de alumnos. No todos los grupos trabajan con problemas de dificultad y complejidad semejante. Todos los alumnos de un grupo hacen matemáticas al mismo tiempo pero no todos están haciendo las mismas matemáticas. El nivel lo marcan ellos, a través de su ritmo y su evolución en el trabajo.

De Basic a dbase, de ahí a Clipper y Visual Basic, y de ahí a php/mysql. De problemas para mi hijo pasamos a problemas para su/mi colegio, y de ahí a problemas en internet. Con todo ello, una mayor sofisticación de software y de Bases de Datos. Cada clic hecho por el alumno dispara de entre cinco y diez tablas que recogen los datos identificativos (si los tiene), el acierto o error, y en este caso la respuesta, el tiempo que tarda en responder, etc, etc, para posterior análisis.

1.5. El error como dato

Creo que, en términos generales, sacamos poco jugo de los errores, pero son grandes aliados de los aprendizajes más estables y aportan humildad a raudales a los protagonistas. Humildad tan necesaria al aprendizaje y tan conveniente para la vida. Frente a la soberbia muchas veces solapada al éxito (acierto) tenemos el error cargado de informaciones de interés, de modestia y cercanía a los otros. Esta es nuestra elección: estudiar el comportamiento del error, dar un paso atrás para coger impulso en nuestro camino.

No es ningún descubrimiento decir que solamente no se equivocan los que no hacen nada y tampoco que el hecho de hacer algo no significa equivocarse siempre. Entre el 0 y el 1 existen millones de posibilidades y esta horquilla es muy amplia referida a las tareas de RP en alumnos de 6 a 16 años.

Por otra parte sabemos que nuestros alumnos⁴ son muy activos, sobre todo delante del ordenador, tablet o móvil, y la RP nos permite estudiar el comportamiento de los errores referidos una gran base de problemas⁵ y durante un periodo de tiempo de más de tres décadas. No obstante hemos de dejar constancia de que los niveles de dificultad de los problemas presentados estaban en sintonía con el nivel de maduración académica o conocimientos de los alumnos y que esta no siempre coincidía con la edad cronológica de los alumnos.⁶ No despreciamos las respuestas acertadas. De alguna manera las tenemos en cuenta aunque solo sea como referente, pero tienen poco valor como información relevante a los objetivos de este trabajo, que no son otros que desmenuzar y estudiar los errores para convertirlos en una herramienta de significación didáctico-pedagógica y psicológica e individual.

Ahora bien, no todos los errores por el mero hecho de serlo aportan información válida. Cuando baja el control del adulto frente a la RP en grupos

-
4. Utilizo aquí alumnos de forma genérica para los usuarios de un software gestor de problemas de dificultad creciente. Unas veces han trabajado dentro del aula (colegio o instituto) con supervisión del profesor, otras en desde casa tutelados por el padre o madre y otras veces, solos o con compañeros, sin supervisión ninguna.
 5. Nos referimos a una colección de 6000 problemas ordenados por dificultad creciente, a razón de 600 por curso académico, y que cubren la mayoría de los currículos matemáticos de los 6 años de Enseñanza Infantil y los 4 de Secundaria Obligatoria (ESO), es decir, de 6 a 16 años. (<https://winmates.net/proble/tanda0.php>)
 6. El concepto de zona de desarrollo, acuñado por Vygotski (1931), indica la distancia entre el grado de desarrollo efectivo (lo que es capaz de hacer sin ayuda) y el grado de desarrollo potencial (lo que puede conseguir con ayuda) del alumno. Dicho concepto delimita el margen de incidencia de la ayuda y también la distancia óptima entre lo conocido y lo nuevo que no debe rebasar determinados límites.

de niños y jóvenes, o bien cuando estos trabajan sin ningún tipo de control, solos frente a la máquina, se pueden producir cantidad de respuestas que no reflejan ni errores de pensamiento, ni conceptos mal comprendidos o usados ni praxis incorrectas. En la medida que no exista esa vigilancia adulta y tampoco autocontrol por parte del alumno, las respuestas dejarán de ser errores para convertirse en simple ruido, en distorsión. Y como tal basura deben ser tratados, eliminándolos, para evitar que contaminen otros errores significativos. No suelen ser difíciles de detectar (11111111..., 1234567890..., qqyqqyqqy..., etc).

Pero existen otro tipo de errores no tan fácilmente detectables como los anteriores. Suelen ser respuestas aleatorias que nada tienen que ver con el problema y sus datos. Guardan las formas pero son respuestas que no están pensadas y suelen darse ante problemas considerados difíciles, largos o laboriosos y que tienen la única finalidad de dar paso al siguiente lo antes posible, es decir, de quitar el marrón de delante de los ojos.

Suelen ser respuestas de error únicas o asociadas a bajas frecuencias. También estas han de ser eliminadas para poder dar información veraz sobre las mismas.

Y como por algún sitio has de cortar, después de hacer una valoración de la información que teníamos delante, decidimos considerar frecuencias de respuesta erróneas bajas, las iguales o menores a cinco.

Así, tras sucesivos procesos de depuración y filtrado, vamos reduciendo de forma significativa el grupo de problemas con errores dignos de estudio. Hemos eliminado de la muestra original de problemas los que presentaban frecuencias de error menor o igual a cinco. Ello supone prescindir de más de la mitad de los problemas. De hecho partimos de 6000, eliminamos 3514 reduciéndose la muestra a 2486, todos ellos con muchos aciertos y con algunas respuestas erróneas idénticas dadas por distintos alumnos con una frecuencia mínima de seis.

Estos errores los llamamos errores sistemáticos.⁷ Se trata de errores idénticos dados por distintos alumnos a los mismos problemas, de forma que podemos suponer que existe un cierto patrón de pautas o de decisiones ante la elaboración de la respuesta.

7. Aclaramos que nuestro concepto de error sistemático no debe ser confundido con el error sistemático estadístico, que es el que se produce de igual modo en todas las mediciones que se realizan de una magnitud. Puede estar originado en un defecto del instrumento, en una particularidad del operador o del proceso de medición, etc. Se contrapone al concepto de error aleatorio (https://es.wikipedia.org/wiki/Error_sistem%C3%A1tico).

Para nosotros el error sistemático es el que presenta un determinado patrón de cálculo al que llegan distintos alumnos de distintas edades, cursos, países o continentes.

La tabla **H01**, del **Anexo. Cuadros y tablas**, muestra un ejemplo de lo que pudiera ser un caso con errores sistemáticos en la respuesta. Espero que el ejemplo sirva de ayuda para poder dejar claro la significación que vamos a darle.

Como vemos en este problema de la tabla **H01** se han dado 96 aciertos y 27 errores, de los cuales 3 se han considerado irrelevantes y 2 sistemáticos. El primero, 196 ha tenido 14 alumnos y el segundo, 24, 10 alumnos. Pero ¿de dónde salen esas respuestas?

La primera, 196, es muy probable que responda al producto de 4 por 7 y por 7 (dos veces) por la presión de 7 semanas oscurece el cada semana que figura al inicio del problema.

La segunda, 24, seguramente sea debida a multiplicar mal (fallo en las tablas de multiplicar) $4 \text{ por } 7 = 24$.

Estas son dos posibles explicaciones de los errores. Obviamente son conjeturas y cada uno puede darle el alcance que desee a tales.

1.6. Matemáticas y vida

No es muy coherente crear y mantener como obligatorios unos contenidos curriculares matemáticos en la Enseñanza Obligatoria que una buena parte de la población infantil no va a llegar a adquirir nunca, bien por carencias personales, familiares, de contexto, de motivación, etc, etc.

Los que piensan que para democratizar el conocimiento solo basta con el control del BOE están confundidos y confunden a muchos bienpensantes que prefieren apostar por el atajo de la magia que por el realismo del esfuerzo y el trabajo continuado.

Lo cierto es que no todos, ni tan siquiera una mayoría de alumnos, va a adquirir todos los conocimientos previstos en los currículos obligatorios. También que ni la totalidad de dichos conocimientos son tan interesantes como para ser considerados obligatorios. ¿Por qué, pues? Debe ser porque se confunden deseos y realidades, porque queda mejor en el papel o porque sobrevaloramos nuestras capacidades como domadores de la realidad.

El caso es que existen unas matemáticas dentro del currículo obligatorio que son necesarias para asumir una auténtica carta de ciudadanía frente a la vida y otras que solo son necesarias para desarrollar determinados oficios o carreras profesionales (matemáticos, físicos, ingenieros, arquitectos y alguna más). Y seguramente sería de mucho interés priorizar el refuerzo de los aspectos básicos sobre otros contenidos que, sin continuidad de estudio posterior, quedarán olvidados en el baúl de los recuerdos o a lo sumo formando parte de una culturilla de barniz y de choque.

Esas matemáticas para la vida son las que me serán de utilidad para entender un recibo (casi siempre), para planificar una amortización, intereses o plazos por un préstamo o demora de un pago, para calcular el IVA de un producto o las retenciones de la Seguridad Social de la nómina, para ver el ahorro por rebaja o descuento de un producto, para llevar una hoja (libro) de registros con entradas y salidas o ingresos y gastos y una lista a la que pongo fin para no aburrir.

Unas matemáticas que incidieran en el sistema decimal de base 10 sobre el que se construyen nuestros números para que todos los ciudadanos pudieran entender y operar, más allá de dispositivos electrónicos, las cuatro reglas, las tablas de multiplicar, el cambio entre múltiplos y divisores de 10, etc.

Unas matemáticas respetuosas con la lógica de las propiedades de las operaciones que pudieran traducir a igualdades y ecuaciones, las propuestas textuales de los problemas escritos.

Unas matemáticas básicas, en fin, que fueran aplicables a todas las tareas de la vida porque en todas ellas caben el cálculo y la optimización. Unas matemáticas menos extensas pero más intensas para la vida.

No siempre es fácil diferenciar lo posible ni lo deseable de lo real pero debería convertirse en un reto prioritario para todo aquel que tiene tareas importantes de planificación y gestión educativa o sanitaria con ingentes cantidades de dinero que provienen, como no, de los humildes gestionados y planificados.

Todos conocemos a mucha gente que no conoce logaritmos, indeterminaciones o números complejos..., ni latín o griego... aunque los hubiera estudiado obligatoriamente.

La obligatoriedad de contenidos matemáticos debería, en primer lugar, restringirse y en segundo exigirse sin camuflajes ni engaños ni *progresiones adecuadas* ni nuevos refritos de conceptos tan vacíos como sonoros e impactantes.

1.7. Literatura en RP

De Piaget, Luria o Vigotsky hasta Polya, Fodor, etc, han sido muchos autores los que han intentado explicaciones, unos con más éxito que otros, sobre las dificultades de aprendizaje de las matemáticas.

Unos han apelado a razones de tipo neurológico, otros a razones de tipo psicológico, lingüístico, metodológico, contextual o de motivación.

Asimismo consideramos de interés los estudios realizados sobre los criterios de delimitación neurológica de las disfunciones en el aprendizaje matemático (acalculias, discalculias, etc).

George Pólya fue un matemático húngaro que entre otras facetas como profesor e investigador propuso un método, que lleva su nombre, para resolver un problema cotidiano, en general o matemático, en particular: el método Pólya.⁸

8. El Método Pólya para resolver un problema consta de 4 pasos. Son los siguientes:

Paso 1: Entender el problema. ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante?

¿Contradictoria?

Paso 2: Configurar un plan. ¿Te has encontrado con un problema semejante? ¿O has visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conoces algún problema relacionado con este? ¿Conoces algún teorema que te pueda ser útil? Mira atentamente la incógnita y trata de recordar un problema que sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar. He aquí un problema relacionado al tuyo y que ya has resuelto ya. ¿Puedes utilizarlo? ¿Puedes utilizar su resultado? ¿Puedes emplear su método? ¿Te hace falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo? ¿Puedes enunciar el problema de otra forma? ¿Puedes plantearlo en forma diferente nuevamente? Recurre a las definiciones.

Si no puedes resolver el problema propuesto, trata de resolver primero algún problema similar.

¿Puedes imaginarte un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general?

¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema?

Considera solo una parte de la condición; descarta la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puedes deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puedes pensar en algunos otros datos apropiados

para determinar la incógnita? ¿Puedes cambiar la incógnita? ¿Puedes cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que estén más cercanos entre sí?

¿Has empleado todos los datos? ¿Has empleado toda la condición? ¿Has considerado todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Paso 3: Ejecutar el plan. Al ejecutar tu plan de la solución, comprueba cada uno de los pasos

¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes demostrarlo?

Paso 4: Examinar la solución obtenida. ¿Puedes verificar el resultado? ¿Puedes el razonamiento?

¿Puedes obtener el resultado de forma diferente? ¿Puedes verlo de golpe? ¿Puedes emplear el resultado o el método en algún otro problema?

(Extraído de <http://mates.aomatos.com/metodo-de-polya-para-resolver-problemas/>):

Se trata de una guía general de una estrategia de acceso al problema y está orientado a problemas más complejos y más difícilmente abordables pero que es fácilmente adaptable a cada caso concreto, RP de nivel básico en nuestro caso.

Desde la década de los 80 del pasado siglo existe una corriente, con la que personalmente me siento bastante identificado, según la cual la RP es una componente esencial en el aprendizaje del conocimiento matemático. Autores como Halmos (1980), Schoenfeld (1983), Kleiner (1986), Melzak (1988), de distintas maneras pero con idéntico fondo, han enfatizado la RP como núcleo de la adquisición de los conocimientos matemáticos.

Ha sido estudiado el comportamiento de expertos (profesores) y novatos (estudiantes) al frente de la RP y la más interesante de las conclusiones es que es fundamental el entendimiento global del problema lo cual incluye, al menos, saber tres cosas del mismo: *qué es lo que se pide, cuáles son los datos que tenemos y dónde queremos llegar*.

Se ha podido igualmente comprobar que los expertos dedican más tiempo a esta primera fase de comprensión global del problema o *modelación* mientras que los novatos, más impacientes, se van antes a fases operatorias posteriores que provocan reasignaciones, replanteamiento y nuevas lecturas del problema.

No existen muchos trabajos que se hayan planteado la evolución de los errores cometidos en RP desde un plano por alumnos a lo largo de toda la enseñanza obligatoria, ni una categorización de los mismos en un abanico tan amplio. Tampoco los análisis de los tiempos de ejecución del problema ni las muestras de alumnos tan amplias y diversas.

Resumiendo, la mayor comprensión del problema incide de forma clara y significativa en los logros de la resolución.

1.8. Para no perderse

En este primer apartado, que es la Introducción, intentaremos hacer una guía de lo que se puede encontrar en cada uno de ellos para facilitar el seguimiento de los contenidos del libro.

No es una tarea fácil su lectura pues hay muchos datos, apartados, comentarios, observaciones, hojas de cálculo en los Anexos, etc. Tampoco tiene un hilo conductor único que poder seguir hasta el final, ni una estructura simple. Hay mucha información, no es fácil seguirla como tampoco lo ha sido estructurarla, elaborarla y mostrarla, pero aún así puede tener interés por quienes hasta aquí hayan llegado.

Esperamos que estas líneas sirvan para agilizar y mejorar su lectura.

En el segundo apartado explicaremos la metodología que hemos llevado a lo largo de este trabajo que tiene un recorrido, desde las primeras colecciones de problema elaboradas hasta 2020, de más de 30 años. Se habla de **winmates.net**, la plataforma que se ha creado a tal fin, el software que se ha ido utilizando sucesivamente a lo largo del tiempo, como se han ido haciendo las ampliaciones y extendido a la web.

Explicaciones de los términos utilizados para manejar y explicar el trabajo y la experiencia, forma en cómo se han ido obteniendo las respuestas a lo largo de los años en el dominio **winmates**, recogida de los miles de datos, de los alumnos en cientos de tablas y bases de datos, algunas con millones de registros y como ha acabado formalizándose la muestra de respuestas que hemos ido obteniendo, la forma de estructurar toda esta información, procesarla y analizarla.

Se comenta también la prueba diagnóstica que se realizaba opcionalmente a los alumnos (padres o profesores que así lo decidían) para estar registrado en **winmates**. Cada alumno registrado tenía un nombre de usuario y una contraseña que permitía trabajar los problemas y dejar grabadas sus respuestas para posteriores análisis por parte del profesor o tutor, continuar el trabajo en el puntero que se había acabado el día anterior etc.

El capítulo 3 de recogida de información, se hace referencia a cuál es la información básica que producía el alumno y cómo era mostrada al alumno y procesada para posteriores análisis.

Había, y hay, una doble oportunidad para los primeros errores y una solicitud al alumno de cómo ha elaborado su respuesta en base a los datos que se muestran en el problema orientado a cerrar el broche de la respuesta no solamente dándola, sino explicando, en un proceso de análisis reforzado por una síntesis del trabajo hecho, cuestión que además de ser buena en sí misma, a veces, evitaba el error.

Todos los problemas estaban categorizados y pertenecían a una única categoría. En caso de presentar dudas sobre la asignación que se daría un

problema, en caso de ambigüedad o multiplicidad, se escogía la que presentara más frecuencia de uso.

A posteriori, las respuestas también eran analizadas y categorizadas en base a ciertos patrones que poco a poco iban dibujando las respuestas y los perfiles infantiles (edad, nivel, etc.)

El cuarto apartado es el más largo y denso del libro. En él se explican como se asocian los aciertos y los errores a los tiempos de respuesta en milisegundos (aunque hay errores que hemos tenido que depurar cuando, por ejemplo, se demoraba la respuesta, por una explicación del profesor, porque el alumno jugaba un rato con el que estaba al lado, o porque sonaba el timbre del patio y no se apagaba el ordenador). Aciertos que se acumulan en un campo, errores en otro, tiempo acumulado de los aciertos y errores en otros dos campos, el error introducido, en su caso, en otro campo, en otra tabla asociado al número de problema y, en su caso,⁹ a la edad/curso del alumno.

El plato fuerte de este apartado son los *errores sistemáticos* en el sentido de que obedecen a un patrón de comportamiento o pensamiento y por tanto no son aleatorios.

No es sencillo operativizarlos, requieren mucho tiempo, y no siempre se encuentran explicaciones al error. Unas veces son fortuitos (el alumno introduce cualquiera cosa que le quite de delante ese problema que no entiende o le cae mal) y otras tienen un patrón, puede verse algún tipo de procedimiento causal generalmente relacionado con deficiencias en la comprensión lectora, en la precisión de los conceptos que maneja el problema, en las relaciones complejas del enunciado del texto, de la operatoria que implican sus cálculos, en la fuerza de los distractores, en no presencia de datos implícito y un largo etc.

La clasificación de los *errores sistemáticos* es bastante exhaustiva, pero estamos seguros de que no llega a abarcar la amplia complejidad del concepto: distractores, conceptos erróneos, fallos en el cálculo, elección de operaciones, pobreza de conceptos en geometría, iniciación a la lógica, confusión entre multiplicativos y partitivos, uso del sistema métrico decimal, etc. Cada uno de ellos con varias clasificaciones y varios ejemplos concretos que ilustran el comportamiento del error y su explicación o explicaciones.

En el apartado **5. Recapitulación** se intenta hacer un recorrido a lo largo de todo el trabajo que va desde nuestras ideas iniciales a las conclusiones pautando los pasos, priorizando y ajustando nuestros intereses a medida que el estudio va evolucionando, delimitando el qué y el como trabajar con **winmates**.

9. Esto solo era posible en los alumnos registrados de los cuales teníamos información de su curso, edad, nacionalidad, etc. Las respuestas de los alumnos no registrados se guardaban solamente si eran errores, no si eran acertadas.

El último subapartado se dedica a las **Conclusiones** que se han ido extrayendo de los errores sistemáticos comentados en el punto anterior.

Todos los comentarios van seguidos de ideas sugerentes de cómo podían ser reducidos o mitigados estos grupos de errores, bien desde acciones concretas dentro del funcionamiento del aula hasta como optimizar el uso de **winmates**.

Recomendaciones (mejor que propuestas) para aminorar los errores y los tiempos de dedicación a la tarea, sobre cómo funcionan los distractores y la justificación de su uso, sobre errores matemáticos muy asentados que es preciso resolver, simple enumeración de las deficiencias en el cálculo o en la elección de la operación que necesita el problema, desconocimiento de conceptos básicos geométricos, iniciación a la lógica formal en los alumnos mayores o más maduros, confusiones muy asentadas entre multiplicativos y partitivos e insistencia en la mejora y uso del Sistema Métrico Decimal, más en lo que conlleva de a Decimal que en lo que conlleva de métrico, sin que esto segundo no deje de tener importancia.

En el apartado 6 relativo a **Anexos** se da un repaso a algunos conceptos que han sido utilizados a lo largo del trabajo que de alguna manera anclan parte de nuestros objetivos, explicaciones y metodología.

A continuación se muestran una por una las 17 tablas que recogen la mayor parte de los fundamentos de nuestra exploración.

A ellos podemos acceder desde cualquier punto del trabajo en busca de comprensión para los temas que se han ido comentando a lo largo de esta hojas. Creo que están mejor situados así, en un anexo final, que repartidos a lo largo de las casi 200 páginas de que consta este contenido.

En el apartado 7, **Bibliografía**, se mencionan brevemente algunas referencias puntuales en los estudios de Psicología Infantil que han sido tenidos en cuenta como prioritarios en nuestro trabajo. La verdad es que no he visto trabajos que se ocuparan de la problemática de la resolución de problemas desde una perspectiva análoga en la edad de la escolaridad obligatoria: miles de problemas creados *ad hoc*, miles de alumnos del mundo hispanohablante participando en ella, análisis de respuestas y tiempos para cada ejecución, cientos de miles de respuestas obtenidas, analizadas y categorizadas, etc.

Existen muchas fuentes sobre *Solving Problems* pero la comparabilidad con nuestros datos es muy poco consistente.

La falta de actualización de esta bibliografía tal vez pueda explicarse por la falta de tiempo para la observación y evolución de los aspectos teóricos que guían las aportaciones de la resolución de problemas en el aprendizaje de usos y conceptos de las matemáticas, pero el trabajo que tenía y tengo delante de mis ojos es ingente.

2. Metodología de trabajo

2.1. Web www.winmates.net

Todos los datos en los que se basa la presente investigación salen de las bases de datos de **winmates.net** recogidos a lo largo de más de 30 años.

Al final del apartado 1.1. mencionamos muy de pasada la evolución del winmates y las tablas que recogen sus datos. Desde los inicios del trabajo hasta su gestión desde la web han pasado casi 15 años y en este tiempo la tecnología informática ha dado un gran paso de mejora, extensión y estandarización que ha obligado a cambios a veces bruscos en el software y en el tratamiento de los datos.

Pero permítaseme una ligera historia de cómo fueron estos inicios a través de algunos viejos pero emblemáticos aparatos y primeros lenguajes de programación de carácter popular y con pretensiones generalistas.

Mi primer ordenador, en el que comencé a introducir las primeras colecciones de problemas era un Sinclair ZX Spectrum. Tenía 48 kb de memoria RAM después de ampliar la memoria y el código creado se grababa en un cassette, que emitía un ruido muy característico tanto cuando almacenaba datos como cuando los leía.



Características del Zx Spectrum:

- Ordenador de 8 bits
- Con un microprocesador Zilog Z80A a 3,5 MHz
- Bus de datos de 8 bits y bus de direcciones de 16 bits
- 16 kb de memoria ROM más 16 (ampliable a 32) de RAM 16 Kb
- Software: intérprete de BASIC Sinclair incluido en la ROM
- Teclado de caucho inicial (que podía ser sustituido)
- Video: matriz de 256x192 píxeles. Resolución de color: 32x24
- Necesitaba de un TV y de un casete para guardar el código
- Lanzado al mercado el 23 de abril de 1982

Los datos eran parte del programa y se almacenaban en las últimas líneas del programa en sentencias DATA. Todo era muy lento y complicado. Grabar o cargar 20 o 30 Kb necesitaba varios minutos (trabajaba a una velocidad crucero de unos 15 kb por minuto) y los errores en la transmisión tanto de entrada como de salida estaban a la orden del día. Corría el año 1986 o 1987. El lenguaje de programación era Basic Sinclair, venía implementado en el firmware del aparato y esta fue mi primera experiencia en programación de ordenadores.

De ahí pasamos al Amstrad Sinclair, que supuso un cambio en cuanto a velocidad, resolución y almacenamiento, con mejoras importantes, y después otro... y otro, y Digital Research con el SO CP/M, y por fin MS-DOS y el PC. Más tarde Windows y, cómo no, Internet: la web.

Del Basic de Sinclair recuerdo que pasé a dbase. La mejoras de este último en relación a las bases de datos era muy importante. De dbase, un nuevo cambio a Clipper un lenguaje que gestionaba muy ágilmente las bases de datos y era más abierto que dbase. Ahí estuvimos varios años hasta pasar a php/mysql (con sus respectivas actualizaciones, que no han sido pocas) ya en la web. De html a html5 complementado por CSS en línea con la tendencia a separar contenido de continente.

Hoy **winmates** gestiona una base de datos con más de 100 tablas alguna de las cuales contiene millones de registros que se han ido almacenando a lo largo de un amplio periodo de tiempo con miles de usuarios (algunos registrados y otros anónimos). Los datos de esas tablas cuyos registros siguen creciendo en la medida que **winmates** es utilizado, han sido retomados a principios de 2020, con un confinamiento de más de 45 días, con tiempo a raudales, con distancia suficiente de los datos (llevo jubilado varios años) para poderlos trabajar sin otras urgencias del día a día que siempre impone el trabajo activo.

En ellas existen datos de alumnos registrados y anónimos. De los primeros tenemos además de las respuestas, su edad, sexo, curso, nacionalidad, nombre del colegio y tutor. De los segundos solo sus respuestas.

La diferencia entre unos y otros es que los primeros poseen un registro en el que se pueden indexar sus respuestas para análisis, seguimiento del trabajo (revisión de errores) y acceso al histórico individual que permite, entre otras cosas, continuar el trabajo en el punto de interrupción donde lo dejó el día anterior.

El enlace de acceso de los alumnos registrados es: **winmates.net/proble/tan_dir.php**, y en él se solicita el Usuario y la Contraseña para poder entrar, lo que a su vez exige haber realizado un Diagnóstico o prueba de nivel para conocer el punto de partida de sus conocimientos iniciales. Esta opción nos permite presumir que está avalada por un adulto (profesor, profesor, padre...) presente mientras el alumno realiza la tanda de problemas, con más control y eficiencia.

Los usuarios anónimos cada día comienzan como si fueran nuevos alumnos desde uno de los nueve puntos previstos por el programa según edad/maduración. El enlace es **winmates.net/proble/tandao.php**, y desde esa opción se ha de elegir el nivel de dificultad en el que se desea trabajar. También podemos presumir que el rigor en el trabajo de los alumnos no registrados, que no requiere de la presencia de un adulto, es sensiblemente inferior al de los alumnos registrados.

Nuestro análisis de resultados se hace a partir de bases y tablas cerradas a 1 de marzo de 2020 y la tabla base de nuestro trabajo es Base6000, cuya información ha sido complementada con la de otras tablas en función de objetivos específicos que nos iremos marcando a lo largo del trabajo.

La tabla Base6000, es el punto de partida con la que comenzamos nuestro trabajo. No es la única, pero sí la que más peso tiene en nuestro estudio. Más adelante, en el punto **2.3.3 Depuración de Base6000**, comentaremos con algo más de detalle lo que ahora dejaremos solamente apuntado.

Base6000 tiene 6000 registros. Cada uno de ellos guarda información relativa de los campos que se muestran a continuación:

N: Nº del problema (ordenados por dificultad).

At: Nº de veces que ha sido resuelto correctamente.

Et: Nº de veces que ha sido fallado.

Ati: Tiempo invertido en los problemas acertados.

Eti: Tiempo dedicado a los equivocados.

Cat: Categoría del Problema en base a la operación que necesita su resolución.

Proble: Enunciado del problema.

Rsmal: Respuestas incorrectas dadas y almacenadas.

Datos: Información explícita en el problema.

Existen otros campos con información de interés secundario para el lector pero necesarias para la gestión y control de la tabla, que no hemos mostrado para no dificultar su lectura.

A partir de Base6000 se ha comenzado un arduo trabajo de depuración.

Las características específicas de la recogida de los datos parten de una realidad concreta que es la siguiente: Las bases de datos están fundamentadas en las respuestas que introduce un alumno de edad entre 6 y 16 años, que puede estar trabajando solo o sin suficiente control que evite la introducción de *basura* en las citadas bases. Es inevitable que se introduzca esta *basura* (respuestas aleatorias, tiempos de ejecución instantáneos o muy dilatados).

Es inevitable un trabajo muy riguroso y serio de filtrado que intente evitar, o al menos minimizar, la contaminación e invalidez de los resultados.

Lo primero que hicimos fue eliminar de esos 6000 problemas (registros

de la tabla) aquellos cuyas respuestas erróneas¹⁰ presentaban una frecuencia de aparición baja.

Muchos de dichos errores son repetidos una y otra vez por alumnos diferentes, desconocidos entre ellos, de distintos centros, provincias, estados e incluso continentes y esa igualdad en el error nos hace pensar en una especie de patrón de comportamiento o en un tipo de razonamiento similar ante determinados enunciados.

Para evitar poner la lupa y también el tiempo ante errores poco frecuentes que pudieran falsear los análisis posteriores y dada la gran amplitud de nuestra muestra de problemas, decidimos tomar como corte la frecuencia 5, es decir despreciamos los problemas cuyas respuestas erróneas sean menores a iguales a 5.

No se han eliminado ni los problemas fáciles ni los difíciles, ni los largos ni los cortos, etc. sino aquellos que no presentaban en sus respuestas erróneas frecuencias menores o igual a 5, lo cual se cumplía a veces en los fáciles y otras en los difíciles.

Obviamente, a igualdad de número de veces hecho un problema, aquellos que tienen más errores tienen más probabilidad de figurar entre los elegidos, pero no por su dificultad sino por altas tasas de reiteración en los mismos errores.

Con este criterio de selección, se excluyen problemas con un nivel alto de dificultad pero con una amplia gama de errores distintos, todos ellos con frecuencias inferiores a 6.

También han sido eliminados un pequeño grupo de problemas en los que los que aparecían errores de notación en la escritura de las cantidades. Más concretamente, el uso del punto decimal como separador de miles. Nuestro software había clasificado como respuesta errónea lo que habían sido diferencias de anotación de cantidades idénticas.¹¹

10. Las respuestas erróneas cometidas por los alumnos se han ido almacenando en el campo Rsmal para posteriores análisis.

11. Recuerdo que siendo yo estudiante de Primaria, aquí, en España, se utilizaba la coma en la notación decimal y el punto en la separación de miles (entre tercera y cuarta cifra comenzando por la derecha), un 1 pequeño (tipo subíndice) entre la sexta y la séptima que marcaba los millones, etc. Sin que yo sepa ni cómo ni cuándo, esto ha ido cambiando. El modelo de notación americana y el uso de dispositivos electrónicos (calculadoras, ordenadores...) han producido el cambio de notación. Ha desaparecido la coma decimal sustituida por el punto, que a su vez ha sido eliminado de la notación de miles, si bien vemos que aún se mantiene en algunos lugares de Hispanoamérica, creo yo aunque sin haberlo corroborado con exactitud.

2.2. El software utilizado

La obtención de los datos de los que partimos en este trabajo se ha ido obteniendo a través de una largo periodo de más de 30 años y en esta tres décadas se han producido cambios muy importantes en los logros de las herramientas informáticas y telemáticas.

La primera colección de 300 problemas, pensados para el nivel académico obligatorio más bajo (1º de EGB), fue ampliándose casi de manera espontánea y poco a poco. Ya inicialmente había una motivación para la generación de nuevos problemas. Si por cada problema fallado se creaban otros dos nuevos de tipología análoga:¹² uno un poco más sencillo y el otro algo más complicado poco a poco iríamos suavizando dificultades y pautando un ritmo de aprendizaje más suave y continuo, con saltos de dificultad progresivamente menores, con aprendizajes más exitosos.

En esta primera fase embrionaria utilizábamos el microordenador Zx Spectrum, que era el continuador de los Zx80 y ZX81. Los programas estaban escritos en BASIC de Sinclair y los problemas se almacenaban en las líneas Data de las últimas líneas de código.

Creo recordar que en estos primeros momentos aún se no guardaban los resultados introducidos. Simplemente se mostraba una aprobación o desaprobación ante la certeza o falsedad de la respuesta dada.

Tras esta primera incursión en el mundo de la informática (microinformática) damos el salto de BASIC a dbase.¹³ Este lenguaje, innovador pues ya trabajaba con bases de datos, permitía tener una cantidad ingente de información perfectamente organizada a través de filas (información de los registros) y columnas (campos, datos de cada registro).

Las bases de datos se almacenan en ficheros .dbf, aún ampliamente utilizado en aplicaciones ligeras que no necesitan una gestión muy compleja para tratar sus datos estructurados.

De dbase 3 pasamos a Clipper que añadía a todas las ventajas del trata-

12. Cuando nos referimos a esta analogía estamos pensando en problemas de estructura semejante, que tienen textos análogos y longitud parecida y que necesitan la misma operatoria para ser resueltos. Generalmente las diferencias apuntaban a los datos, las cantidades a operar, lo cual suele aportar un plus de dificultad y de error.

13. dBASE fue, de hecho, el primer software de gestión de base de datos usado por microordenadores y supuso un enorme avance al facilitar la búsqueda de un registro a través de una clave superando la búsqueda secuencial generalizada en los lenguajes de programación como BASIC. Fue creado por la empresa americana Ashton-Tate y originalmente destinado al sistema operativo de texto CP/M aunque pronto se orientó también hacia Apple, IBM bajo DOS y finalmente para Windows. No tardó demasiado tiempo en ser superado por otros como Paradox, Clipper.

miento de datos del primero una mayor potencia, velocidad y agilidad en su código. Nuestras bases de problemas necesitaban de continuas optimizaciones para ser utilizadas al mismo tiempo por decenas, y más tarde cientos, de alumnos al mismo tiempo.

No tardaría mucho tiempo en aparecer solemnemente la web, lo que supuso un gran cambio en todos los universos informáticos. Se avecinaba otra nueva migración aunque esta vez las bases de datos con colecciones de problemas ya podían ser exportadas a nuevos lenguajes y formas de acceso.

Y de Clipper a HTML, PHP y MySQL. El primero es el acrónimo de Hyper-Text Markup Language, HTML o lenguaje de marcado para la elaboración de páginas web. Se trata de una estandarización realizada por el World Wide Web Consortium. Esta organización, también conocida como W3C o Consorcio WWW, es la entidad vigilante y reguladora de la estandarización de la mayor parte de las tecnologías ligadas a la web, haciendo especial hincapié en los temas de escritura e interpretación del código.

En estos momentos (2020) vamos por la 5ª versión, el HTML5.

Muchas instrucciones, comandos y tags se van quedando obsoletos con los vertiginosos cambios se van produciendo en la tecnología. Los afanes de estandarización de protocolos van tendiendo progresivamente a separar dentro del código los datos de la gestión de los mismos.

La implementación del CSS u hojas de estilo en cascada como complemento de HTML5 está permitiendo avances muy significativos en el terreno de la web. Tanto, que pueden llegar a convertirse en un peligro real con un uso perverso de la información almacenada.

El PHP, preprocesador de hipertexto, es un potente lenguaje de programación de propósito general cuyo código trabaja desde el lado del servidor. PHP no genera código HTML pero puede complementarse fácilmente con él generando una salida de texto codificado en UTF-8 que garantiza la compatibilidad con HTML, es decir, con los exploradores y navegadores y por tanto dando una respuesta perfectamente entendible por el usuario. Su creador fue Rasmus Lerdorf (1995) aunque en estos momentos sigue evolucionando y creciendo con nuevos comandos de la mano del grupo PHP y forma parte del software libre publicado bajo la licencia PHP 3_01, que es una licencia Open Source validada por Open Source Initiative. La licencia de PHP está incluida en el estilo de licencias BSD, que no tiene la condición de *copyleft* (opuesta al *copyright*) asociada con la Licencia Pública General de GNU.

MySQL es una de las cuatro integrantes de los proyectos LAMP, WAMP y XAMPP, que son los paquetes informáticos web más potentes y populares en la actualidad. Es una base de datos relacional de código abierto creada bajo licencia dual, por una parte tiene Licencia pública general y por otra una Licencia comercial de Oracle Corporation. Junto con Oracle y Microsoft

SQL Server constituyen las bases de datos más populares en la actualidad.

Las últimas letras de los acrónimos corresponden a los nombres APACHE (servidor de datos), MySQL, que incluye MySQLi y MariaDB (bases de datos y PHP/Perl (lenguajes de programación).

La letra inicial de los paquetes es para los sistemas operativos que gestionan todo el software: Linux, Windows o cualquiera de estos dos u otro.

Desde los orígenes hasta hace tres años, nuestro proyecto ha estado gestionado por WAMP, aunque en los últimos tiempos lo hemos pasado a XAMPP, cuyas prestaciones para nuestras necesidades son superiores.

Todos nuestros scripts o programas están escritos php-html, que en total rebasan de sobra el medio millar, no estuvieron listos desde el primer día, desde la puesta en funcionamiento de recogida de datos.

Se han llevado a cabo múltiples tanteos, muchas pruebas sobre el grado de aceptabilidad del trabajo propuesto, etc. a lo largo de estos más de 30 años.

Algunos programas permanecen desde el principio con los cambios que requieren las actualizaciones del software matriz. Otros intentos de ampliación han sido testeados y eliminados porque la idea rectora no lograba abrirse camino entre los alumnos, falta de estética en la presentación, dificultad de las tareas, etc.

Finalmente otros ensayos lograban introducirse como controles al trabajo que se venía haciendo o a nuevas tareas que irían ampliando **winmates**. Pero claro, no lo hacían con carácter retroactivo. Podían generar respuestas, pero no siempre concordantes y sumativas a las ya existentes, de forma que existen casos con dos medidas diferentes de la misma observación que no coinciden porque están realizadas en periodos, intervalos, centros y países diferentes.

2.3. Proceso de elaboración

2.3.1. Terminología y Diagrama

De entrada presentaremos una serie de conceptos que pueden ser necesarios para la comprensión de cómo se ha ido elaborando la recogida de datos de este trabajo.

Se trata de términos a los que damos unas connotaciones y ajustes propios de nuestra metodología y que no siempre pueden coincidir con el uso cotidiano de los mismos.

- 1.– At y Et. Nº de aciertos y de errores del problema. Es el total de veces que un problema ha sido resuelto correcta e incorrectamente. Con la introducción de la respuesta se incrementa en 1 el valor de los campos At(acierto) o Et(error).
- 2.– Ati y Eti. Es el total de tiempo en segundos (desde su presentación en pantalla a su resolución) que ha necesitado un problema para ser resuelto, correcta e incorrectamente. Con la introducción de la respuesta se incrementa el campo Ati (acierto) o Eti (error) en el total de segundos transcurridos entre la presentación del problema y su resolución.
- 3.– Continuo de dificultad. La tabla Base6000, que es dinámica y acepta cambios continuos en algunos de sus campos, reajusta el orden de presentación de los problemas según su dificultad $[100 \times Et/(At+Et)]$ de forma que la línea de tendencia es el continuo de dificultad.
- 4.– Justificar de respuesta. Tras la resolución correcta de un problema se pide (si es viable) justificar la respuesta, es decir, explicar con una igualdad el camino que me llevó a la respuesta en término de operaciones y datos. Soy consciente de que no siempre es fácil explicar la trayectoria de nuestro pensamiento para llegar a la respuesta, pero creemos que esta acción es una fuerte aliada del proceso de análisis y síntesis de nuestro pensamiento frente a la tarea. Es su broche de oro.
- 5.– Nivel Educativo. La colección de 6000 problemas cubre un periodo de 10 cursos académicos: uno para cada uno de los 6 cursos de Enseñanza Primaria y otros 4 para los 4 de la ESO.
Dado el continuo de dificultad en la tabla podemos decir que cada Nivel Académico tiene un recorrido de 600 problemas.
- 6.– Puntero: Es un número de 1 a 6000 obtenido a través del Diagnóstico y que, basado en las respuestas dadas, sitúa al alumno en el problema de comienzo de trabajo.
- 7.– Segunda oportunidad. Cada problema fallado tiene, tras un aviso de error, una segunda oportunidad de ser resuelto correctamente. Para evitar que esta posibilidad, interesante en principio, pueda convertirse en una elemento contaminador, esta segunda respuesta dada no será guardada, evitando que el mismo problema pueda tener más de una respuesta errónea por alumno. Cada problema fallado tiene, pues, una única respuesta por alumno.

- 8.– Tanda de trabajo es el número de problemas de una sesión de trabajo.
Genéricamente varía entre 10 y 18 (según alumnos más jóvenes y mayores) y tras cada tanda realizada es recomendable la supervisión del profesor o padre que acepta la conveniencia de continuar el trabajo o no.
- 9.– Diagnóstico. Es la primera tarea a la que se enfrenta el futuro usuario de winmates.net. Es una prueba de 30 problemas de dificultad progresiva que pretende medir el suelo base de la maduración matemático–calculatoria que nos sirva para comenzar el trabajo en RP.
Dada la dificultad progresiva cuando se producen tres errores continuados se deduce que el alumno ha llegado a su nivel competencial.
- 10.– Errores sistemáticos. Ya apuntados en la nota al pie nº 6.
Consideramos errores sistemáticos aquellos errores en la respuesta a un problema que, lejos de mostrar un comportamiento pasota, de mal funcionamiento intencionado o aleatorio, obedecen a una patrón de pensamiento o decisión de que puede ser inteligible.

Respecto al diagrama sobre la ejecución de un problema se van sucediendo diferentes tipos de eventos (mostrar el problema, esperar la respuesta o proceder a solicitar la justificación del problema (representado por un rectángulo) cuyo flujo va a ir dibujando distintas rutas en base a las decisiones, representadas por un rombo, que el alumno toma a lo largo del problema.

Unas líneas rectas con flecha nos orientan del sentido de los caminos y van acompañadas de letras o letras asignadas a valores que no son otra cosa que inicializadores de conteo de ruta y nos informan cómo, cuándo y dónde forzar cambios ante respuestas tipo basura que pueden contaminar aciertos fallos y tiempos de resolución.

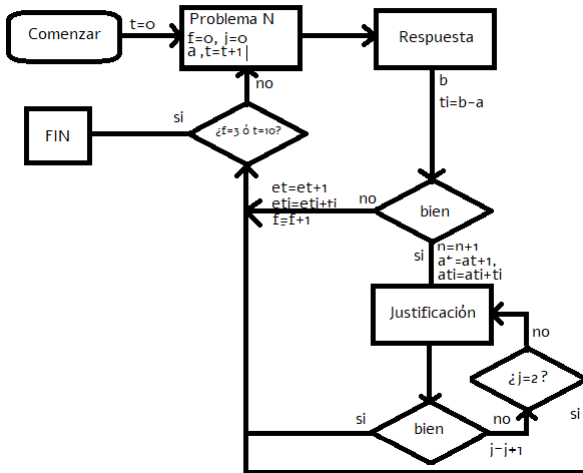
Todo ello en tandas o *packs* de 10 a 18 problemas de la dificultad que se esté trabajando en ese momento y que puede no ser la misma para todos los alumnos del aula clase. Es más, pueden existir tantas dificultades diferentes en cada aula como ordenadores o grupos existan, e incluso dentro de los mismos niveles de conocimientos es normal que cada alumno o grupo trabaje con un problema distinto.

Esto es así por la aleatorización que brevemente comentaremos en el punto siguiente.

2.3.2. Obtención de las respuestas

Dadas las sucesivas adaptaciones de hardware, de software y de BBDD, a que nos hemos referido en el punto anterior, tomaremos como referencias las llevadas a cabo tras el último cambio, es decir, tras la actualización de nuestro software a Xampp.¹⁴

Ejecución de un problema. Diagrama



Los scripts a los que se accede para trabajar con nuestra tabla de trabajo, que llamaremos Base6000, son dos: **winmates.net/proble/tan_dir.php** y **winmates.net/proble/tandao.php**.

El primero para alumnos registrados a winmates.net, gratuitamente, y el segundo para los que realizan la resolución de problemas desde el anonimato, es decir, sin registro.

Cuando el alumno está registrado es posible mantener, seguir y actualizar su trabajo y asociarlo a su registro de forma que cuando desee finalizar, el trabajo pueda ser almacenado y recordado la próxima vez que arranque esta modalidad de **winmates**. Ello incluye la posibilidad de analizar sus respuestas, sus errores globales y sus detalles, los tiempos invertidos en la resolución, es decir, la evolución de su trabajo.

Estar registrado requiere estar dado de alta en nuestras bases. Se deben introducir varias variables identificativas y clasificatorias, un correo electrónico y resolver, lo mejor que se pueda y sin ayuda, un diagnóstico que nos permitirá obtener un puntero desde el cual comenzará a trabajar y se irá actualizándose a medida que vaya haciendo problemas.

Tal vez convenga una aclaración de términos para entender el funcionamiento de **winmates**.

Cuando el alumno no está registrado, no habrá un direccionamiento directo a un puntero acorde con sus niveles de maduración. Por ello se le pedirá el nivel madurativo donde desea trabajar y se le propondrán problemas

14. XAMPP Control Panel v3.2.3 [Compiled: Mar 7th 2019]. Incluye el servidor Apache, la base de datos MySQLi y el lenguaje de programación PHP.

aleatorizados de entre 600 que tiene cada nivel madurativo. Sus respuestas son grabadas para posteriores análisis, pero dado su carácter anónimo, no podrán ser colgadas de ninguna identificación.

Cada bloque de problemas por sesión (unos 20 minutos de trabajo con oscilaciones importantes según edad y motivación) se denomina tanda de trabajo.

Tenemos constancia de la difícil y lenta tarea de categorizar determinados problemas según la operatoria que exige su respuesta. Veamos algunos ejemplos:

1°. ¿Cuántas orejas tienen 3 niños? Se resuelve con una suma ($2+2+2$) o un producto (2×3).

2°. ¿Cuántos pares puede formar con 8 cosas? Mejor escoger restar ($8-2-2-2-2$) o dividir ($8:2$).

Se trata de ejemplos muy simples pero significativos. Hay más, claro, pero sería tedioso mostrar más y más ejemplos para algo que es una obviedad.

Cuando hemos tenido que llegar a tomar decisiones sobre este tipo de aspectos donde la norma puede ser aplicada en más de una dirección siempre hemos recurrido al sentido común. Creo que es la mejor llave para solucionar este tipo de marrones que si bien son pocos, no son excepcionales.

En los hipotéticos casos anteriores, mencionados a modo de ejemplo, hubiéramos optado por asignar el producto y la división respectivamente. Son las opciones, digamos, más evolucionadas. En todo caso la incidencia de estas tomas de decisiones es poco relevante sobre el grueso de la categorización operatoria de los problemas y también lo es la proyección de las mismas sobre los errores obtenidos en las respuestas.

Si la hemos mencionado es simplemente porque nos las hemos encontrado, hemos tenido que resolverlas y no tenemos ningún interés en ocultarlas. Al contrario queremos mostrar como las hemos abordado genéricamente y si procede asumir la contestación que de tales decisiones pudiera hacerse.

Otro punto que deseamos aclarar en aras de una mayor comprensión del trabajo es el siguiente hecho:

Desde el inicio se pensó en bloques de 600 problemas por cada uno de los 10 cursos obligatorios. Las zonas limítrofes de los bloques tienen una dificultad parecida (continuo de dificultad comentado en el apartado **2.3.1 Terminología y Diagrama**) y pese a ello unos estaban asociados a un grupo y otros al siguiente o anterior.

Pero no todos los alumnos de la escolarización obligatoria cambian de curso porque han superado un nivel de conocimientos o simplemente un nivel madurativo. Eso ya dejó de ser totalmente verdad con la Ley Villar Palasí

de 1970 y ha alcanzado sus máximas cotas en 1990 con la puesta en marcha de la LOGSE, cuando el concepto *progresar adecuadamente* que nos hace más amigos a los alumnos/padres y a los profesores, pero peores alumnos y peores profesores, dejó de tener un sentido *buenrollista*.

Cuando hablamos de cursos o niveles académicos casi de forma indistinta, hemos de hacer algunas aclaraciones.

Con los límites derivados de lo anteriormente comentado y con todas las matizaciones que se deseen y con todas las ponderaciones que sean necesarias, nuestras conclusiones huirán de la rotundidad del experimento físico, pero también del relativismo negacionista que sentado en la perfección administra nulidad en todo lo que no sea una entidad de pensamiento. Entre el blanco y el negro hay mucha gama de grises y entre el 0 y el 1 infinitos decimales. Que cada cual les asigne el valor que desee.

2.3.3. Depuración: Base2486

En este punto trataremos de explicar los cambios y depuraciones realizados desde que comenzamos a trabajar con Base6000 de 6000 registros hasta que obtuvimos el resultado final, que llamaremos Base2486. Un gran filtrado en función de unos criterios que pretendieron eliminar aquellos registros con una alta carga de información desechable para el seguimiento de los errores.

Tales criterios fueron los siguientes:

- 1.– Eliminar los problemas acertados más del 92% de las veces realizados. Comparados con el resto de problemas, los que cumplían con esa condición eran muy fáciles.
- 2.– Eliminar problemas fáciles de frecuencias muy altas (por encima de 620 ejecuciones).
- 3.– Eliminar los 1000 problemas más difíciles (del 5001 al 6000) pensados para alumnos de 3º y 4º de ESO, por tener tasas muy bajas de ejecución, con información importante, pero con escasa muestra.
- 4.– Eliminar puntualmente algunos problemas con anotaciones concretas (ambigüedad «./.» en separaciones de miles o decimales, problemas de dificultad flexible (aumento o decremento del significativo puntero en base a la ejecución de los alumnos), etc.)

En la tabla **H02** de **6.2. Cuadros y tablas** mostramos la estructura de los campos. Existen más informaciones complementarias en otras tablas, pero este es el núcleo duro de la información.

Asimismo, han sido ocultados algunos campos considerados como poco relevantes para nuestro trabajo y consecuentemente para el lector y han sido creados otros a partir de informaciones previas, o de otras tablas, que

pueden mejorar la comprensión global del trabajo.

La estructura de la tabla Base6000, contenedora de 6000 registros de nuestros problemas, con algunos de sus campos más significativos, podemos verla en **6.2 Anexos. Cuadros y tablas utilizadas**. H02. **Estructura de Base6000: algunos campos.**

El siguiente paso, tal vez uno de los más laboriosos y aburridos, fue el de transformar unos datos de texto, en agrupaciones de datos con la frecuencia con que aparecían.

El campo Rsmal que admitía una longitud de hasta 255 caracteres, recogía todas las respuestas erróneas que recibía el problema a lo largo del tiempo, separadas por coma.

Hubo que agrupar todas las respuestas lineales e iguales en forma de pares, es decir, cada respuesta fallada asociada a su frecuencia de repetición.

También se hubieron de eliminar los problemas cuyas respuestas presentaban errores de anotación (coma decimal y punto como separador de miles) que ya hemos comentado en el apartado **2.1 Web winmates.net**.

Con el ánimo de minimizar la influencia de la *ganga* sobre la *mena*, procedimos a eliminar la primera, la *ganga*, que quedó operativizada como tal cuando un error aparecía con una frecuencia inferior o igual a 5, aspecto que ya comentado en el punto 2.1. Es decir se eliminan los problemas con pocos errores o ninguno (caso hipotético), lo cual incluye los de tienen una frecuencia de repetición inferior o igual a 5.

Tras más de un mes de trabajo con estas tareas de limpieza hemos obtenido una tabla de 2486 registros llamada Base2486. Han sido eliminados más de la mitad de los problemas. Una purga muy significativa donde solo han quedado aquellos que tenían en sus respuestas errores sistemáticos estables, dignos de estudio y análisis. De todo ello nos ocuparemos en el siguiente apartado.

En la tabla **H10, Anexo. Cuadros y tablas utilizadas**, podemos observar los cambios en aciertos, errores y tiempos a través de las distintas categorías de problemas en relación con las tablas Base6000 (original, con 6000 problemas) y Base2486 (depurada, con 2486, menos de la mitad de ellos).

2.4 La muestra

Lo primero que hemos de decir para curarnos en salud es que la muestra con la que vamos a trabajar no cumple con los requisitos estadísticos de aleatoriedad, sesgo, etc. exigibles a los trabajos experimentales con su hipótesis nula y alternativa, su control de variables y su fuerte aparataje estadístico.

Tampoco existe en nuestro caso una población susceptible de ser representada por la muestra. Y si existiera sería tan difícilmente operativizable que sobrarían los controles usuales que impone la metodología estadística.

Nuestro objeto de estudio es el error cometido por los estudiantes a lo largo del periodo de diez años Enseñanza Obligatoria. Y eso se dice pronto, pero abarca mucho.

Queremos tener información sobre qué pasa con los errores en la Resolución de Problemas (RP a partir de ahora), el peso que tienen frente a los aciertos, si pueden ser estables, sistemáticos y parametrizables, si existen pautas de regularidad en su comportamiento, etc. Y todo ello porque creemos que ese conocimiento nos facilitará el poder acercarnos a los procesos de pensamiento, o al menos de decisión, del alumno frente a la RP, es decir, frente a las dificultades de aprendizaje que conllevan la matemáticas.

El error es el problema de los problemas. El análisis del error será nuestro tema de estudio, cómo se comporta será nuestro objetivo y la posibilidad de que este sea desescalable, nuestra hipótesis. La muestra, una colección de 2486 problemas, textos escritos que exigen comprensión y demandan una respuesta que necesita, aunque no siempre, la manipulación o combinación operatoria de unos datos, implícitos o no. De la totalidad de problemas que eran el punto de partida, han sido eliminados aquellos cuyos errores eran solo aleatorios o solo presentaban una baja frecuencia de repetición.

Trabajamos con respuestas, con las respuestas que miles de alumnos han dado a miles de problemas redactados y pensados para cubrir la mayor parte del currículo matemático de la Enseñanza Obligatoria. Respuestas y tiempos de obtención de respuesta de niños o chicos hispanohablantes en edad escolar.

En tabla **Ho3**, apartado Cuadros y tablas, vemos la agrupación por niveles y tipos de problema y podemos observar las frecuencias cruzadas de las variables Curso (Nivel Académico) que toma 10 valores (6 de Primaria y 4 de ESO) y Categorías, con 8 tipos de problema según la operación u operaciones que requieran su resolución. Es una delimitación y clasificación de los problemas trabajados por los Alumnos (edad-maduración) clasificados por Categorías.

La tabla **Ho4**, en Cuadros y tablas, contiene datos relativos a las subcate-

gorías que conforman cada una de las categorías que se reflejan en la **Ho3** y que nos permiten hacer una serie de observaciones generales relacionadas con el muestreo y los tipos de problemas.

- 1.– Globalmente, el bloque mayor de problemas cae del lado de Primaria (más de 2200), frente a menos de 300 de alumnos de la ESO.
- 2.– Podemos considerar despreciable la incidencia en este trabajo de alumnos de 3º y 4º de ESO.
- 3.– Hay 5 cursos, los últimos de Primaria de los que obtendremos el máximo de información sobre errores. Corresponden a las edades cronológicas de 7 a 12–14 años.
- 4.– Las categorías con más problemas son:
 - Noper. La resolución no requiere ninguna operación pues suele ser un dato expreso; está influenciada por la capacidad lectora, maduración y motivación, (20% de los problemas).
 - Opbas. Resueltos con una sola operación básica, (25%).
 - Varop. Aquellos cuya respuesta necesita más de una operación, (7%).
 - SMD. Los que trabajan con el sistema métrico decimal (incluida la base de nuestro sistema numérico, 15%)
 - Mulpar. Aquellos con referencias a multiplicativos (doble, triple, etc.) y partitivos (mitad, tercio, etc, 22%).El resto de categorías, Geome, Ecuac, Ppr3 y Otro, son menos significativas en el conjunto de los errores ya que presentan frecuencias mucho más bajas. También será menor su incidencia en el grueso del nivel madurativo y en su comportamiento evolutivo.
- 5.– Por último, lo que comenzaron siendo una agrupación de problemas con contenidos y dificultad de carácter evolutivo, gracias a sucesivas extensiones y obligaciones educativas que cuestionaban el conocimiento como esencial para la promoción de curso, se ha ido devaluando.

Poco a poco, a lo largo de estos últimos 30 años, lo que era originariamente nuclear para el curso 4º de Primaria, por ejemplo, será ahora caballo de batalla en 5º o 6º... de Primaria (incluso en la ESO). Alumnos sin los conocimientos ni competencias mínimos, que deberían estar adquiridas varios años atrás, progresan y progresan curso a curso, adecuadamente, según nuestras leyes y sus predicadores, los pedagogos oficiales, esos mercenarios para el sinsentido educativo.

En **Ho4** se muestran datos sobre las frecuencias de las subcategorías que tienen interés en tanto en cuanto engloban una categoría de frecuencia amplia. Quedan descartadas y sin subparticiones, en este momento, las categorías 20 Varop, 30 Geome y 40 Ecuac, en buena parte, por sus bajas frecuencias,

aunque serán parcialmente retomadas a la hora de estudiar el comportamiento de las respuestas (apartado **4.3. Errores sistemáticos** y tabla **H17**).

En el punto **2.3.2 Obtención de las respuestas** comentábamos nuestros problemas de decisión al asignar determinados problemas a diferentes categorías según la o las operaciones que los resuelven.

Ahora se trata de crear subcategorías, o apartados dentro de aquellas, en las que presentan frecuencias más altas. Esperamos que esta mayor concreción redunde en una mayor precisión analítica, unos resultados más cercanos, comprensibles, útiles y unas mejores conclusiones.

Según nuestro parecer hay subcategorías que pueden aportar datos de interés en su momento, al menos con esa finalidad las hemos creado.

Dentro del primer bloque, *Sin Operaciones* (0x), las Subcategorías **03** y **04** pretenden poner el foco en la lectura, detenimiento y/o comprensión del texto. En la práctica docente hay multitud de situaciones en las que se pueden ver los efectos de la mala lectura de un problema; dar por supuesto lo que se va a preguntar y responder sobre lo que no te preguntan, esperar que las cantidades son siempre numéricas y solo numéricas, tendencia a operar con todos los datos, etc.

El resto de subapartados tienen también un claro interés dentro de la categoría de problemas cuya respuesta no necesita ninguna operación, solo comprensión de la lectura y observación.

El segundo bloque, *Operaciones básicas* (1x), se dedica a aquellos problemas que se resuelven con una única operación básica (suma, resta, producto y cociente).

Dado que estamos valorando errores, puede tener interés conocer cuáles son las principales sustituciones de dichas operaciones o bien si existen errores no en el concepto operatorio sino en la mecánica implícita del mecanismo resolutorio, que se va haciendo más complejo y dificultoso progresivamente. La dificultad aumenta de la suma al cociente, pero también con la ampliación del conjunto de números utilizados (naturales, enteros, racionales, etc.).

Los problemas del bloque tercero, con *Varias operaciones* (2x), son aquellos cuya resolución necesita de más de una operación y suponen un salto importante en dificultad. Requieren, por lo general, más datos, más longitud de texto y mayor elaboración que los anteriores, y por ello son más propios de alumnos con mayores niveles de maduración cronológica y, sobre todo, cognitiva o mental.

El apartado *SMD* (6x) hace referencia al Sistema Métrico Decimal: longitud peso, capacidad, unidades, cambios, equivalencia, etc, pero también al sistema decimal o de base 10 en el que fundamenta nuestro sistema numérico, que parece ser que no es tan bien conocido como sería deseable.

También forman parte de este apartado aquel tipo de transformaciones e intercambios cotidianos entre cantidades iguales representadas por sistemas de numeración con bases distintas: paso de días a meses o años, de minutos a horas o días, etc.

En relación al punto *Multipar* (7x), bastante extenso, se refiere a unos cuantos conceptos que pueden ser agrupados en dos: multiplicativos y partitivos. Los primeros con efecto multiplicador (doble, triple, etc.) y los segundos con efecto divisor o partitivo (mitad o medio, tercio, etc.). No siempre está muy claro el uso ajustado de muchos de estos conceptos, que tampoco muestran un tipo de error aleatorizado, sino que mas bien suelen sufrir la conversión por su inverso.

Finalmente los grupos de *Geometría* (30), de *Ecuaciones* (40), de *Porcentajes, proporciones y regla de 3 (Ppr3)* (5x) y *Otras* (8x), presentan frecuencias bajas que comentaremos en su momento.

Tenemos en cuenta como variables a estudiar la longitud del texto del problema (longitud de la cadena del enunciado), la categoría del problema según la operatoria que requiere su respuesta y la dificultad genérica relacionada con la adecuación a los diez cursos estudiados.

2.5 La prueba diagnóstica

Hemos comentado varias veces que las respuestas obtenidas sobre los problemas presentados venían fundamentalmente de dos fuentes diferentes, los alumnos registrados y los anónimos. Los primeros, registrados y generalmente tutorizados, con seguimiento de las tareas realizadas, etc. frente a los segundos, anónimos, *por libre* y sin seguimiento.

El registro de un alumno se llevaba a cabo a través de un pequeño formulario que había de cumplimentar (nombre, sexo, edad, colegio, nacionalidad...) seguido de una colección de hasta 30 problemas ordenados por dificultad creciente que cubrían básicamente los contenidos matemático-resolutorios de toda la escolaridad obligatoria. El enlace es <https://winmates.net/mar/diag.php>.

La tabla con los 30 problemas recoge el número del problema, el texto, la respuesta y la categoría del problema según el tipo de resolución (ejecución) que requiere. Podemos verlo en la **H13** de Cuadros y tablas.

El diagnóstico concluye cuando el alumno alcanza tres errores consecutivos (recordamos la dificultad creciente de los problemas de la prueba). Con la prueba acabada se obtenía un nivel del alumno que marcaba un suelo o puntero desde el cual el recién registrado podía comenzar a trabajar en **winmates**, en un punto concreto de Base6000 (tabla con 6000 problemas a razón de 600 por curso para cada uno de los 10 cursos de la enseñanza obligatoria).

También se informaba al alumno del resultado de la prueba como podemos ver en la tabla **H14**, que le reportaba el nombre de Usuario y la Contraseña para acceder como alumno registrado a la RP de winmates, que normalmente gestionaba no el alumno sino el profesor o tutor.

En la base de datos que recoge los alumnos registrados constan más de 3000 alumnos diagnosticados. Pero los resultados de esta tabla no han sido analizados.

3. Recogida de datos

3.1. Por cada clic dado

Cada vez que el alumno hace un clic en las opciones de resolución de problemas, ya comentadas,¹⁵ se almacenan distintas informaciones para posteriores análisis. Así, tomamos nota de la respuesta introducida, de si esta es la correcta o no, en cuyo caso la guardamos para análisis, del tiempo en segundos que tarda en elaborarse, es decir, del tiempo de ejecución, que merece algunos comentarios adicionales.

En punto **2.3.1. Terminología y Diagrama** se muestra un gráfico con todas las acciones (inicialización o actualización de punteros y marcadores, decisiones alternativas, grabación de tiempos y respuestas, etc) que se realizan tras un clic en RP.

Introducir la respuesta al problema y clicar *intro* o *return* dispara un conjunto de acciones cuya finalidad es almacenar dicha respuesta, el acierto o error, los tiempos de ejecución en ambos casos, incrementar el contador de fallos (en caso de error).

Y en su caso (si el alumno estaba registrado) asociar todas esas respuestas con sus características personales (sexo, edad, curso, colegio, etc).

Tal como ya comentamos en el punto **1.4. Problemas y currículo**, distintas tablas se van encargando de mantener toda la información activa y creciente, de forma acumulada a través de los años que ha durado la experiencia.

El tiempo de ejecución es el que transcurre entre la muestra del problema y la introducción de la respuesta. En su momento observamos que no era excepcional ver tiempos de elaboración de respuestas que estaban agrandados artificialmente por causas distintas al tiempo de resolución (dos alumnos que hablan, interrupciones del profesor al grupo clase, tomarse la merienda... mientras el tiempo seguía contando). Tiempos superiores a los de dedicación causados por interrupciones extras al trabajo en la tanda.

Tiempos hinchados en algunos casos y muy reducidos en otros. En ambos casos los tiempos se escapan a la dificultad intrínseca de los problemas.

Problemas respondidos casi instantáneamente, normalmente por carencia de simpatía para el alumno, pueden llegar a tener un efecto paradójico: existen problemas que cuando más difíciles son, menos tiempo de resolu-

15. En los links winmates.net/proble/tan_dir.php y winmates.net/proble/tanda0.php se puede acceder a ambas modalidades de resolución de winmates.

La primera es para alumnos registrados (winmates.net > Menú Problemas > Submenú winmates).

La segunda, para alumnos anónimos o sin registrar (winmates.net > Menú Problemas > Submenú Dificultad).

ción necesitan. Sobre todo si el nivel madurativo del alumno no se corresponde con la dificultad de la tarea.

Hemos de señalar otra deficiencia, poco significativa porque afecta a un número reducido de casos pero real, y es un tema de diseño de la base de datos originaria. (Ver **H05. Problemas con desbordamiento de tiempo** en el Anexo de Cuadros y tablas utilizadas).

Cuando montamos la estructura de las tablas de la base, dos de los campos numéricos, concretamente Ati y Eti, donde se recogerían los tiempos dedicados a la resolución, fueron definidos como smallint(6). En aquellos momentos, y durante mucho tiempo después tampoco, no conocía exactamente lo que significaba *smallint*.¹⁶

Por otra parte, en los comienzos, tampoco pensamos que las cantidades acumuladas de tiempo en segundos para cada problema rebosara el límite del concepto elegido.

Así fueron creciendo las bases de datos con sus respectivas tablas. Millones de resultados iban entrando en ellas y había otras prioridades en el día a día que detenerse y observar como iban creciendo los distintos campos.

El caso es que no hemos podido evitar o filtrar las citadas deficiencias. Ni la dificultad (o la poca simpatía del problema) ni las interrupciones dentro del tiempo de ejecución que forman parte de la respuesta en situaciones de trabajo abiertas, a distancia, con población infantil y sin control directo, pero se han colado en nuestro diseño. En todo caso, aparte del efecto de contrabalanceo de ambos déficits, el número de casos afectados tiene muy poco peso frente al total.

Es ahora cuando hemos visto que algunos registros concretos muestran frecuencias iguales muy altas. Si excluimos la casualidad se ha de buscar una explicación, y esta no es otra que smallint(6) tiene un límite y no admite números mayores de 32767. A esta cantidad no se puede añadir nada cuando se llega a su techo. Con todo, los registros con rebosamiento son solamente 12 como se puede observar en la tabla **H05**.

Nosotros pensamos que esa pequeña pérdida de tiempos no resta ningún tipo de información significativa ya que dichos problemas no dejan de ser, en promedio sobre las veces hechos, de resolución lenta, algo más lenta de la que queda reflejada. Todo ello será tenido en cuenta en nuestras conclusiones y comentarios.

16. Smallint(6) significa una delimitación numérica para números enteros pequeños, entendiendo por tales los incluidos entre -2^{15} y 2^{15} (2 elevado, matemáticamente, a 15), es decir, de -32768 a +32767. La restricción de la amplitud de los valores de los campos numéricos está relacionada en el tamaño de las tablas y la agilidad de sus movimientos posteriores. En su momento ignorábamos todas estas cuestiones, no somos informáticos, y ahora toca explicar nuestras deficiencias.

Nos hemos referido antes a la anotación de los tiempos de resolución de los problemas, así como a las dificultades que hemos tenido que ir solventando. En la tabla **Ho6**, en **Anexo 6.2 Cuadros y tablas**, se muestran aciertos, errores y total de problemas realizados por alumnos registrados en winmates.net, agrupados en función del tipo de operación que necesitan para ser resueltos. En las tablas **Ho3** y **Ho4** ya hemos utilizado, prácticamente, esta misma agrupación si bien con distintas pretensiones. Y digo prácticamente porque no es exactamente así.

La tabla origen de esta extracción se llama Restanda, está hecha y funcionando antes de modificaciones posteriores y además recoge información, exclusivamente, de alumnos registrados y diagnosticados¹⁷ en **winmates**. Ello implica que, en general, tras esa decisión hay un adulto, padre o profesor, interesado en el buen funcionamiento de la herramienta y el buen uso del material. Y todo ello queda reflejado en los resultados obtenidos y obviamente en la tasa de errores obtenida.

Adicionalmente, existen algunos cambios en el reajuste de ciertos conceptos y categorías que consideramos menores y sin gran significación.

La muestra de problemas realizados es de 319028, 245244 de ellos acertados en primera oportunidad y el resto, 73784, fallados. La tasa de dificultad media del total de problemas ($100 \times \text{errores}/(\text{aciertos}+\text{errores})$) es, aproximadamente, del 23%, cercano a un error de cada cuatro problemas hechos.

Las dificultades medias por tipo de categoría oscilan entre el 21 y el 30%.

El grupo de Operaciones Básicas, es decir, los que se resuelven con una única operación básica, suponen más de un tercio del total (el más numeroso) y también son los que presentan menores tasas de dificultad media, 20%. Frente a ellos, los de Ado, los más difíciles (30%) si bien con pocos datos de muestra hecho que sin duda relativiza su alcance.

Señalamos asimismo la alta dificultad de los agrupados bajo la categoría SMD, que incluye el sistema de medidas tanto como el sistema de numeración decimal.

Reiteramos la pureza de la presente muestra de alumnos registrados que trabajaban bajo control y supervisión de personal adulto responsable. Ello influye en los resultados como veremos más adelante.

17. Los alumnos registrados hacen un diagnóstico a través del cual se evalúa su nivel. Este se asocia a un puntero y a un usuario y es el origen de la tarea de resolución de problemas. Tras cada resolución de un problema se actualiza el puntero.

3.2. Respuesta y tiempo de reacción

En la tabla **HO7**, en el **Anexo 6.2. Cuadros y tablas utilizadas**, tenemos básicamente tres tipos de datos. Los primeros, relativos a los aciertos y errores, como en el punto anterior pero aplicado a otra muestra más abierta y menos restrictiva que la mencionada. Los segundos, las dificultades promedio de los problemas hechos. Estos, junto con los anteriores, presentan un cierto grado de comparabilidad con la tabla HO6 anteriormente citada, si bien, recordamos que las subcategorías del tipo de operación, en este caso sobre Base2486, presentan ligeras diferencias con la base restanda, más restrictiva y selectiva. El tercer tipo de datos son los tiempos dedicados a estas ejecuciones, agrupados en aciertos y errores.

Respecto a los aciertos, errores y sus dificultades haremos una comparación de las mismas observaciones en dos tablas distintas: Restanda y Base2486. La primera con alumnos diagnosticados, orientados y/o guiados en su trabajo, (Restanda), que trabaja sobre 6000 problemas, y la segunda formada por todo tipo de alumnos, diagnosticados o anónimos, guiados o sin orientación ninguna a la hora de trabajar (ver punto 2.2.3 Depuración de Base2486), y que pierde más de la mitad de los registros (pasa de 6000 a 2486) en el proceso de depuración como ya se ha explicado.

El primer aspecto que queremos mostrar como contraste entre ambas tablas es la diferencia entre el número de problemas realizados en ambas: 319028 de restanda frente a 2381397 de Base2486.

A esa mayor cantidad de problemas se ha de añadir un menor control o vigilancia en la tarea realizada, donde los alumnos trabajan más libres de las presiones habituales de un adulto. Y trabajar sin estar registrado puede significar frecuentemente que el alumno (o el profesor) escoge un nivel de dificultad inferior al que corresponde el nivel madurativo del alumno, es decir, un trabajo donde dicho alumno tenga más fácil acomodo. En todo caso, alejado de problemas de su nivel cognitivo, que le exigirían un mayor esfuerzo de resolución.

Una primera consecuencia de lo dicho es que, paradójicamente, los alumnos *tutelados*, frente a problemas de dificultad no escogida sino determinada por su puntero y por tanto más cercana a su nivel, obtienen tasas de error superiores (23%) a los alumnos *por libre*, es decir, aquellos que eligen la franja de dificultad donde trabajar (10%).

Recordemos también que de Base2486, cuyos problemas están incluidos en Restanda, han quedado excluidos todos los que presentaban una frecuencia en sus errores inferior o igual a 5.

Es decir, no son forzosamente los más fáciles pero sí son más fáciles en términos generales por lo cual podríamos esperar tasas de error más eleva-

das. La presión del mayor facilismo de la tarea es superior a la mayor dificultad objetiva de los problemas de Base2486.

Un segundo aspecto es el que hace referencia a los tiempos de ejecución de los problemas. Las columnas centrales de la tabla HO7 (Ati, Eti y Total) reflejan los tiempos en segundos contabilizados en la obtención de las respuestas. Las celdas centrales de la fila inferior muestran los tiempos totales en horas para hacer más visible el tiempo de ejecución.

Aquí se recogen un total de 11868 horas de trabajo/alumno, equivalente al trabajo de 11868 alumnos durante 1 hora, o si se prefiere al tiempo lectivo de un alumno a lo largo de 11 cursos académicos, resolviendo problemas de nuestra tabla depurada Base2486. Del resto de problemas de la tabla original Base6000, exactamente 3514, que incluyen los más acertados, obviamente no obtuvimos resultados.

Tres cuartas partes de ese tiempo total ha sido utilizado para resolver aciertos y el cuarto restante para los que tuvieron una respuesta errónea en primera oportunidad. Frente a esta relación de tiempos de 3 es a 1, la ratio de problemas acertados o fallados es de 1 es a 9. Es decir, los tiempos globales no guardan la misma proporción que guardan sus frecuencias.

Por último, las tres filas de la derecha (segAti, SetEti y SegTot) muestran el tiempo medio en segundos para cada agrupación de problemas según el tipo de operación que requiere su respuesta.

Todos los tiempos referidos en dichas columnas oscilan entre el menor, 10, para aciertos de Otro y 50 para errores de Varop (problemas cuya resolución requiere dos o más operaciones).

El tiempo medio de resolución de un problema es de 18 segundos, 15 cuando se trata de un problema acertado y 45 cuando es fallado. O sea, el tiempo medio dedicado a resolver problemas con error (45 seg) casi triplica al tiempo de los acertados (15).

Se trata, como podemos ver, de tiempos muy pequeños para las tasas de error que estamos manejando y el continuo de dificultad de los problemas, lo que asegura que no hay saltos importantes en la tarea resolutoria.

Seguramente todos los adultos (padres o profesores) que han trabajado con **winmates** saben muy bien que los artilugios tecnológicos como ordenadores, consolas, teléfonos, tablets, etc. disparan a los alumnos hacia la acción. La inmediatez de la respuesta, la falta de constancia (solo aparente) del error, el anonimato, la necesidad de una motivación a bajo costo, etc. son algunos de los más importantes enemigos de la corta duración del proceso de elaboración de respuesta.

Es bastante raro encontrar alumnos pensando durante un tiempo una respuesta ante un problema que les resulta difícil. Es mucho más frecuente ver apretar el intro y probar suerte con otro que no requiera tanto esfuerzo.

Estos son los hechos y este es el hándicap de nuestra tarea: lograr incrementar el tiempo de ejecución de un problema. En **Ho8** volveremos sobre el número de problemas de los diez cursos de la Enseñanza Obligatoria (6 de Primaria y 4 de ESO) que ya había sido reflejado en la tabla **Ho3**.

Ahora añadiremos dichos totales por grupo, los aciertos, los errores y los tiempos de ejecución de ambos. Vemos que los datos de la columna Total de la derecha de esta tabla (**Ho8**) coinciden con la TotalProb, la fila inferior de la tabla **Ho7**.

El bloque fuerte de trabajo realizado está en los seis cursos de Primaria que acumulan más del 95% de los problemas hechos y más del 97,5% de los tiempos.

En todos los cursos se puede ver que el tiempo medio dedicado a los problemas fallados es superior a de los problemas acertados si hacemos excepción del grupo de ESO4. Este dato junto a los correspondientes a ESO1, ESO2 y ESO3, los consideramos poco relevantes pues el número de problemas de dichos grupos es muy pequeño, poco significativo y distorsionador de los resultados, como puede verse en los tiempos medios de resolución de la ESO, excepto ESO4, que son netamente inferiores a los de Primaria, lo cual no tiene mucho sentido.

3.3. Categorización de respuestas

La tabla **H12** contiene la información relativa a la catalogación de las respuestas obtenidas. Intentamos a través de esta categorización tipificar las respuestas erróneas que los alumnos dan a los problemas.

Nada tenemos que decir de los aciertos, si excluimos *¡perfecto!* Y nada podríamos decir ni en este punto, ni en este trabajo si no existieran errores para especular sobre su contraste por grupos, sobre su alcance o profundidad.

La información objetiva que contiene cada problema y de la que hablamos en el punto **2.3.3 Depuración: Base2486 (H02. Estructura de Base6000: algunos campos)**, no es la única información que se transmite.

Los enunciados están casi continuamente salpicados de ligeros dobleces, de pequeñas marañas, de información inherente a conceptos, o de otra no necesaria o no explicitada, etc, etc.

No. No es un ejercicio de sadismo para hacer sufrir a los alumnos. Podría serlo si nuestro fin fuera retorcer su mente para disfrutar con su padecimiento o aguante ante situaciones complejas. Pero no. No. Lo que nos guía no es esa idea.

Lo que nos interesa es ejercitar su pensamiento para que puedan desbrozar el sendero resolutorio, para que tengan o afinen la capacidad de extraer de los enunciados, progresivamente más ambiguos y complejos, aquellos elementos significativos, con información relevante que les permitan llegar a soluciones aceptables.

Sé que esta propuesta es un tema espinoso y genera polémica. Recuerdo haberla defendido profesionalmente, en mis años docentes en foros de profesorado, claustros o departamentos... La postura contraria a la mía, esa del sadismo que mencionaba, estaba y supongo que sigue estando, incardinada en no pocos profesionales y/o padres más preocupados por el hedonismo del aquí y ahora que por una educación donde el NO ha de estar, al menos, tan presente como el SÍ porque si no es un mal negocio. Mejor dicho, puede ser un buen negocio, pero no educativo.

Pero volvamos sobre el tema que nos ocupa en este punto que es el de ver como hemos intentado agrupar las respuestas. Tenemos en primer lugar un grupo de lo que llamamos Distractores en algunos problemas que presentan las siguientes características:

- Datos ocultos o no presentados como tales. Suelen ir implícitos en conceptos de uso frecuente.
- Datos explicitados pero no en formato numérico, sino textual, en letra.
- Uso capcioso de términos, cuya literalidad no coincide con el contexto ni comprensión del enunciado.

- Confusores o uso de conceptos contrarios a los usados: Suma/resta, r/s, p/c, c/p.
- Influencia o presión del primer dato del problema en la respuesta.
- Influencia o presión del último dato del problema en la respuesta.

En segundo lugar tenemos un grupo de conceptos erróneos o utilizados erróneamente por una parte del alumnado. Son estos:

- Conceptos cotidianos no forzosamente matemáticos: docena, par, semanal...
- Seriaciones, en los que se ha de calcular un término en una serie de números relacionados
- Uso de los signos mayor, menor y igual ($<$, $>$, $=$)
- Conceptos matemáticos varios como sumando, dividendo, denominador, redondeo, raíz, potencia...
- Propiedades de las operaciones: asociativa, conmutativa y distributiva.
- Fracciones: Concepto, términos, significado y operatoria.
- Otros: Probabilidad, proporcionalidad, cambios de base (10 a 60 (paso de minutos a horas, por ejemplo).

En tercer lugar tenemos los errores de cálculo que se presentan al realizar operaciones con números, que no obedecen a patrones de aleatoriedad sino a inconsistencias de un aprendizaje regular o malo.

A ello hay que añadirle algunos fallos reiterados y que son los siguientes:

- Suma: errores en la suma y *lo que me llevo*.
- Resta: Fallos en resta, en *lo que me llevo* y otros de tipo $57-39=22$.
- Producto: Fallos en decimales, presencia de un 0 en el multiplicador y *lo que me llevo*.
- Cociente: Fallos frecuentes en la técnica, *lo que me llevo* y los decimales
- Conmutabilidad errónea: confusión minuendo/sustraendo y dividendo/divisor
- Descolocación de cifras: no respetar el valor relativo de las cifras
- Dificultad para expresar los resultado decimales
- Muy rara: con errores de cálculo distintos a los vistos previamente

En cuarto lugar veremos los errores en las operaciones. Se diferencia del anterior en que en este punto detectamos un error de concepto que va más allá del típico error de cálculo. Se confunde la operación a utilizar, no forzosamente el cálculo con dicha operación. Las subcategorías son las siguientes:

- Suma en vez de resta
- Resta en vez de suma
- Producto en vez de cociente
- Cociente en vez de producto

- Suma en vez de producto
- Resta en vez de producto o cociente
- Evitar operaciones, generalmente las más difíciles
- Añadir operaciones, basada en una tendencia a operar todos los datos
- Varios: sustituir dos o más operaciones en un mismo problema

En quinto lugar Geometría, que es una categoría con muy poco peso y poco interesante para las intenciones que perseguimos.

En sexto lugar Lógica, que tampoco necesita muchas explicaciones pues es una categoría sin ninguna partición e igualmente con poca frecuencia.

En séptimo lugar tenemos los Multiplicativos y partitivos de bastante interés pues incluyen bastantes conceptos usuales que son confundidos con mucha frecuencia de forma, digamos, correlativa (doble/mitad, triple/tercio, etc).

Una mención aparte necesita el concepto «veces», que figura en las subdivisiones. Este actúa por defecto, es decir, sin matizaciones, como múltiplo o multiplicativo, pero puede hacerlo como partitivo o divisor cuando precede a la palabra menos. Los más importantes, aunque la lista es mucho más larga, son los que se mencionan seguidamente:

Multiplicativos o múltiplos sencillos

- Doble
- Triple
- Otros y *veces*.

Partitivos o divisores sencillos.

- Mitad
- Tercio
- Cuarto
- Quinto
- Otros (*veces menos*, sexto...)

En octavo lugar y por último, la categoría SMD que incluye el sistema métrico y todos los errores derivados del mal uso que de nuestro sistema decimal de base 10 tienen los alumnos. Tenemos cuatro subcategorías que son las siguientes:

- Longitud
- Peso
- Volumen
- Sistema numérico de base 10

Pero, ¿cómo hemos llevado a cabo esta tarea de categorización de respuestas?

Ha sido un proceso largo y tedioso que requiere mirar y remirar los errores con sus correspondientes frecuencias en cada problema.

Por otra parte, no siempre ha sido fácil decidir cuál es la asignación de un problema a una categoría o subcategoría. En muchas ocasiones existen más de un elemento a tener en cuenta antes de tal asignación, pero en cada problema existe una y solo una categoría/subcategoría de respuesta.

En este caso siempre nos hemos decidido por aquella categoría que presenta el error con la mayor tasa de frecuencia. Y en caso de no ser posible aplicar esta regla, por ejemplo cuando existen varios errores todos ellos con la misma frecuencia, hemos seleccionado aquella que nos ha parecido de más interés para la investigación.

En la tabla **H12**, en el **Anexo 6.2 Cuadros y tablas**, mostramos sintéticamente todo lo que hemos ido comentando a lo largo del apartado.

La primera columna da nombre a cada una de las categorías de respuesta, la siguiente al código que nosotros usamos para referirnos a ellas y encontrarlas en las bases de datos, la tercera y la cuarta explican y describen algunos detalles para que puedan ser comprendidas y la columna de la derecha contiene el número de problemas que cada una de las subcategorías, es decir, su frecuencia.

Buscamos patrones de respuesta, un salto desde la casuística individual de cada problema a una categoría que represente un modelo explicativo de la génesis del error, no del error uno a uno, sino de lo que muchos errores tienen en común.

3.4. Otras informaciones.

A lo largo de los puntos anteriores hemos ido mostrando el origen de informaciones que serán el fundamento de nuestro trabajo, pero el nivel pormenorizado de algunos aspectos mencionados, y de otros que lo serán posteriormente, ha necesitado de información complementaria de algunas de las tablas diferentes de las que hemos ido hablando en apartados anteriores.

Haremos en este apartado un breve comentario sobre algunas de ellas al objeto de poder sustentar algunas observaciones, encajar algunos comentarios, dotar de rigurosidad a ciertas aseveraciones y sostener el sustrato básico y empírico de las conclusiones.

TABLA DIFÍCIL. Es una tabla que recoge los registros fallados por los alumnos. Además del número del problema fallado se graba la respuesta introducida en modo texto, y la identificación del usuario (si estaba registrado), lo que nos permitía reportar dichas respuestas posteriormente al alumno y analizar la causa del error, etc. En caso contrario el campo de identificación quedaba vacío. En el momento de cierre de datos para este trabajo, la *tabla Difícil* recogía 258956 registros brutos... de los que habría que excluir todos los que presentan una respuesta 0 o vacía y que se sitúan en torno a los 54000.

TABLA HISTORIA. Es una tabla con 3450 registros y recoge, entre otras informaciones, el día de la fecha (today) y el total de problemas realizados cada día. Los datos de fecha más viejos son del año 2006 y los últimos de 2016, unos diez años. El día que más problemas fueron realizados (bien o mal) fue el 2013-04-11, exactamente 7269. Hay varios días que figuran 0 problemas hechos que coinciden con los días de caída del servidor.

La suma de los problemas hechos en estos 10 años, es decir la suma del campo Prob de la *tabla Historia* es de 1761458. El promedio de problemas realizados cada día en este intervalo de 10 años, asciende a unos 518. Tenemos otra tabla complementaria a esta, llamada *Historia noreg*, en la que se recogen los problemas hechos por alumnos no registrados, referidos a diferentes subcategorías. Tiene un tamaño menor (la suma del campo Prob es de 141658).

TABLA INFORMA. No es una tabla muy grande, ya que tiene 2984 registros, pero es muy densa, pues en ella se contienen muchos campos donde almacenar variables relacionadas con los alumnos registrados tales como identificación, variables de **winmates** (aciertos, errores, punteros, tiempos...), variables de contexto (colegio, país, profesor, curso escolarizado ...) en los que se apoya la gestión de **winmates** en el día a día.

Almacena datos de los años que van de 2004 a 2016, ambos inclusive.

TABLA DIAG. Contiene tan solo 30 registros, cada uno de ellos con información referente a los problemas utilizados para llevar a cabo el registro a **winmates**.

Cuando alguien desea ser usuario registrado necesita hacer una primer diagnóstico a través del cual se obtendrá una puntuación, una referencia de cuál es su nivel de maduración en el campo de la resolución de problemas. Más adelante, cuando pretenda ponerse a realizar esta tarea resolutoria (trabajar con winmates), no necesitará elegir una y otra vez la dificultad de sus problemas sino que la puntuación obtenida será punto de partida del trabajo y eso de forma independiente de su curso académico o de su edad cronológica y será incrementada al ritmo que vaya haciendo problemas.

Los citados 30 problemas están ordenados por dificultad creciente y winmates detecta que se ha llegado al nivel resolutorio cuando se dan tres fallos consecutivos, lo que pone fin a la prueba.

TABLA DIAGBASE. Esta es una tabla de 2964 registros. Ello significa que contiene 2964 alumnos que se han registrado como usuarios de **winmates**.

Cada uno de ellos ha resuelto el diagnóstico, los problemas de diag comentados en la tabla anterior, hasta concluir la tarea.

Se considera que la secuencia de 3 errores consecutivos, junto con la ordenación por dificultad creciente de los problemas, equivale a haber llegado al techo del nivel madurativo propio.

La puntuación directa de aciertos (sobre 30) es proyectada a una tabla de 6000 problemas de dificultad creciente para comenzar el trabajo.

Así mismo quedan almacenados en la tabla los errores cometidos, el acumulado de los fallos según el tipo de problemas y la eficacia resolutoria, que es el porcentaje de problemas acertados sobre el total de los resueltos.

TABLA ERRACI. Contiene 6000 registros correspondientes a cada uno de los 6000 problemas que tenemos en Base6000. En ella se recogen el total de aciertos (At), el total de errores (Et), el total de tiempo en acertados (Ati) y el total de tiempos en errores (Eti) para cada uno de los problemas.

Es una tabla acumulativa con mucha información de interés en el conteo de aciertos, errores, problemas hechos, y tiempos respectivos medidos en segundos.

4. Análisis de los datos

4.1. Aciertos, errores

Una primera idea que deseamos comprobar es la relación, si es que existe en los niveles estudiados y con las limitaciones comentadas, entre los aciertos/errores y la longitud del texto.

En la tabla **H11, Anexo 6.2, Cuadros y tablas**, mostramos los resultados obtenidos de una consulta a la base solicitando aciertos, errores y el número de problemas del grupo. También los totales para distintas agrupaciones según la longitud del enunciado, cuantitativamente equilibradas por el número de problemas.

Mostramos dos agrupaciones. La primera consta de dos subgrupos (problemas cortos (menos de 71 caracteres) y largos (más de 71 caracteres) y la segunda, de cuatro, cuyos cortes quedan reflejados en la tabla.

Como vemos el número de problemas está bastante balanceado en los dos grupos, lo que permitirá obtener diferencias no relevantes entre los aciertos y errores de ambos en el caso de que la variable aquí planteada, la longitud del enunciado medida en número de caracteres, sea una variable no significativa para discriminarlos.

Tampoco la segunda agrupación aporta relevancia significativa sobre el porcentaje de errores entre los tres grupos de longitud de texto.

Resumiendo, la longitud del enunciado de los problemas, definida y cuantificada en los términos que indican en la tabla, no está relacionada con los fallos obtenidos en las respuestas.

Existen, por tanto, problemas largos o cortos con bastantes errores y otros, igualmente largos, con pocos.

Seguramente existen problemas largos con una dificultad muy alta pero tal dificultad más que atribuirse a la mayor longitud del problema debe de ser atribuida a la mayor carga de conceptos difíciles o de situaciones o contextos más complejos. El promedio de errores sobre aciertos se mueve en torno al 10% (1 error por cada 10 aciertos) con muy ligeras subidas solo perceptibles en los grupos de longitud mediana.

En la tabla **Ho7 (apartado 6.2. Anexo, Cuadros y tablas utilizadas)** sobre Respuesta y tiempo de reacción, se puede ver (fila $100 \times Et/At$) el comportamiento del promedio de errores referidos a los tipos de operación requerida para resolver el problema.

Observamos una tendencia semejante a la comentada anteriormente si bien las variaciones en torno a ese 10% de errores sobre aciertos son, puntualmente, algo más visibles aunque siguen sin marcar una tendencia clara, estable y estadísticamente significativa.

Un único aporte, los mayores errores relativos obtenidos son los de las categorías Noper y SMD, ambos con un 13%.

Los primeros engloban a los problemas que no necesitan ninguna operación para ser resueltos, es decir, son fáciles de elaboración pero exigen una absoluta comprensión del texto, un requisito mucho menos extendido de lo deseable, al menos en la muestra de alumnos con la que trabajamos.

Los segundos, agrupan el Sistema Métrico unidades y cambios de longitud, peso y volumen) y, sobre todo, el uso y manejo de nuestro Sistema Decimal de Numeración.

La tabla **Ho8 (Anexo 6.2 Cuadros y tablas)** muestra los datos sobre la evolución del error a través de la línea marcada por los cursos de la Enseñanza Obligatoria, que tampoco arroja mucha luz y se mantiene en la tónica de lo explicado previamente.

Dos comentarios nada más.

Primero, descartamos los errores relativos a los cursos ESO3 y ESO4 puesto que las cuestiones de filtrado llevadas a cabo en las fases previas del presente trabajo, los dejaron con muestras de problemas poco potentes para poder obtener datos significativos al respecto.

Segundo, el error máximo (13%) se produce en el centro del período de Primaria, curso 3º, que asimismo coincide con el curso que más problemas ha realizado. Tal vez este dato sea un apunte de donde la efectividad del trabajo en RP sea óptima.

4.2. Los tiempos de ejecución

En el punto **3.2. Respuesta y tiempo de reacción** ya introdujimos el tema de los tiempos dedicados a la resolución de los problemas, si bien muy superficialmente. En el presente apartado volveremos sobre estos aspectos con más detalle y detenimiento.

De entrada, hay citar otra vez incluso a riesgo de ser reiterativo, que en las tareas de filtrado y depuración entre Base6000 y Base2486 hemos abandonado más de la mitad de los problemas de la primera, para ser más concreto casi el 59% del total.

Nos hemos ido desprendiendo de los problemas que aportaban poca información en relación a nuestro objeto de estudio que es el tema del error.

Han sido eliminados, pues, los problemas que (solo en teoría) no presentaban ningún error; también los que presentaban unas tasas de error pequeñas, medianas e incluso grandes pero con unas tasas de repetición de errores bajas que pudieran ser explicadas desde un patrón probabilístico o estocástico.

La eliminación muestral de problemas con más aciertos añade la densidad de los errores, aspecto que conviene remarcar ahora y recordar en el momento de interpretar los resultados.

La tabla **H07** (apartado **3.2.**) muestra los aciertos, errores, totales y los tiempos respectivos en relación al tipo de operación que resuelve el problema. Las filas Ati, Eti y Total muestran los tiempos acumulados medidos en segundos para cada una de las filas. El tiempo ha sido medido a través de la variable `time()` de php. La diferencia entre el tiempo final (que coincide con el intro de introducción de la respuesta) y el tiempo inicial (el anotado con la presentación del problema en pantalla), en segundos, es la duración del problema. Si el problema es acertado ese tiempo es añadido al campo Ati de dicho problema. En caso contrario, es decir, si es fallado, se añade al campo Eti. Así funciona la mecánica del control de los tiempos de ejecución.

Ya comentamos el tema de los desbordamientos de tiempo, y se pueden ver en la tabla **H05** del **Anexo sobre Cuentas y tablas** utilizadas, los efectos de algunos de las deficiencias propias del conteo de tiempos y desbordamientos aritméticos asociados a `smallint(6)`.

Con la idea de facilitar una comprensión más sencilla de los tiempos, en la columna de la derecha (Totalhoras) podemos ver el tiempo medido en horas (segundos/3600), que en sus totales se acerca a 12000 horas, es decir, el equivalente a tres colegios de 400 alumnos trabajando todos ellos al mismo tiempo durante una hora con **winmates > Resolución de problemas**.

La proporción de los tiempos dedicados a los problemas acertados frente a los fallados es de 3 es a 1, pero teniendo en cuenta que la proporción

entre el número de aciertos frente a fallos es de 9 es a 1, podemos decir que los segundos (los fallados) requieren más tiempo para ser resueltos que los acertados.

Todo esto puede verse más claramente a través de las tres filas inferiores dedicadas a los tiempos medios de ejecución en segundos.

Vemos que sobre un promedio de tiempo de resolución de 18 segundos para la totalidad de los problemas hechos, las categorías Opbas y Varop, correspondientes a Operaciones básicas y Varias operaciones respectivamente son ligeramente superiores a dicho promedio, aunque sin llegar a la significatividad estadística en el caso de la primera (19 sobre 18) y posiblemente tampoco de la segunda (21 frente a 18).

Por lo que respecta al tiempo medio de los errores, no se ven diferencias entre Opbas y el total de problemas, pero sí son perceptibles las existentes entre Varop y los totales, seguramente de forma significativa.

En relación al tiempo de los aciertos, se reproduce el esquema comentado respecto a los totales, pequeñas diferencias no significativas, 17 segundos (Opbas) y 18 (Varop) frente a 15 (en la totalidad de problemas).

En relación a las puntuaciones medias de tiempo inferiores a los promedios totales no arriesgaremos ninguna observación contrastada pues la poca muestra de problemas de algunas categorías lo impide por ausencia de rigor.

Con todo, no podemos dejar de confesar nuestra extrañeza por los tiempos tan pequeños dedicados, en general, a la resolución de problemas. Diríase que muchas veces esos tiempos no son suficientes tan siquiera para comprender el significado del problema.

En determinados casos podemos hablar de un comportamiento en cierta medida paradójico respecto a los tiempos. Es decir, a veces, cuando un problema presenta una dificultad excesiva respecto a las expectativas del alumno, la elaboración de la respuesta, lejos de necesitar más tiempo, es recortada y cortocircuitada.

Se evita la dificultad con una respuesta cualquiera, inmediata, pasando al problema siguiente y probando suerte en la esperanza de que el nuevo problema requiera menos tiempo y esfuerzo en su resolución.

Suponemos que el proceder del alumno frente al ordenador, esta inmediatez o falta de reflexión de la respuesta y la desinhibición garantizada desde el anonimato tienen bastante que ver con esta actitud casi generalizada de un cierto *pasotismo* del todo vale que hemos observado.

De hecho, para verificar el alcance de esta observación hemos recurrido a otra tabla llamada Informa a la que nos hemos referido en el punto 3.4.

En ella se recogen los aciertos, errores y tiempos de los problemas hechos por casi 3000 alumnos registrados en **winmates**. Recordamos que re-

gistrados, en este caso, significa que todos los alumnos han sido diagnosticados para ver cual es su nivel madurativo, que todos han obtenido un puntero (un número del 1 al 6000) de inicio de trabajo en coherencia con los resultados del diagnóstico pasado y que en general, y es esto es sumamente importante, los alumnos han estado trabajando en un contexto de aula (con el profesor en ella) o con presencia directa de un adulto en el caso de las familia, es decir, bajo un control que limita las típicas chiquilladas del todo vale que obviamente se traducen en resultados.

En **Ho9, Anexo 6.3** Cuadros y tablas, podemos ver los resultados obtenidos por sujetos registrados que trabajan con problemas ajustados a su nivel madurativo y bajo control adulto (padre o profesor).

Nos interesa dejar remarcado de forma contundente que, frente a los números mostrados en **Ho7**, los tiempos han crecido de forma bastante visible en la presente tabla.

Los tiempos dedicados a la resolución de problemas en alumnos registrados y, digamos, con control de aula, se han multiplicado casi por 3.

La presencia de un adulto en la sesión de trabajo de RP de **winmates**, hablamos de alumnos de edades comprendidas entre 6 y 16 años, es similar a la de un catalizador en una reacción química normal, evita que se disparen ciertos procesos guiados por el principio de entropía o nivel de caos o desorden de un sistema, en este caso, social.

Seguramente el tiempo de dedicación a la resolución sigue siendo bastante bajo, pero es un gran paso multiplicar por 3 los tiempos de dedicación, sobre todo en los problemas contestados erróneamente.

En su momento habíamos citado como un importante reto de mejora de la RP en **winmates** el hecho de poder aumentar el tiempo de ejecución de los problemas y frenar lo más posible esa tendencia a la acción y al intro rápido que se va imponiendo con el uso de la tecnología, sobre todo en las edades más tempranas donde poco a poco se va sustituyendo el pensamiento reflexivo y analítico por la inmediatez de la acción como si esta continua improvisación en busca de lo lúdico, atractivo o cambiante, etc, no tuviera consecuencias ni derivadas.

El efecto del estar registrados (trabajar en el punto de maduración del alumno) y la presencia adulta hace que los tiempos de ejecución de aciertos pase de 15 a 45, en errores de 42 a 71 y en el total de problemas hechos de 168 a 51 segundos. Respecto al análisis de los tiempos según la evolución de los cursos han de hacerse los siguientes comentarios:

- 1.– Consideramos que los tiempos de los dos primeros cursos de Primaria son poco significativos dada la poca muestra de los problemas realizados en ambos cursos comparados con el resto.

- 2.– Los cursos donde el número de problemas hechos es mayor son Eso1 y Pr6 (6º de Primaria).
- 3.– El mayor peso de los alumnos en esta muestra de problemas está a favor de los 4 grupos de alumnos de la ESO frente a los 6 cursos de Primaria, en una ratio de 2 es a 1.
- 4.– Para la muestra de problemas analizada, parece que los tiempos de los aciertos va haciéndose ligeramente menor a medida que avanza la escolaridad de los alumnos, lo cual reflejaría que, globalmente, los problemas fáciles (más acertados) cada vez van siendo más fáciles (son acertados en menos tiempo). Similar comportamiento revelan el total de problemas hechos.
- 5.– No ocurre lo mismo en los errores cuyo tiempo medio de resolución permanece más bien estable, en torno a los 70 segundos, a lo largo del periodo de tiempo de la escolaridad obligatoria.
- 6.– En la muestra actual de problemas (H09) se ve una mayor participación de los cursos superiores (los cuatro de la ESO) que puede cifrarse en superior al 70% de los problemas realizados. Frente a esto lo que ocurría en H08 donde el conjunto de cursos de Primaria tenía un mayor peso en el total de los problemas realizados superior al 90%.

4.3. Errores sistemáticos

Ya hemos comentado con anterioridad este concepto que retomamos ahora para ver su comportamiento como categoría y también de manera diferenciada. La casuística es muy amplia y rica y esperamos poder llegar a realizar aportaciones de interés.

Estas observaciones se basarán en la información que hemos ido obteniendo en las bases de datos a lo largo del tiempo. La tabla H01, del Anexo de tablas, presenta el ejemplo de un problema cuyas respuestas muestran dos errores sistemáticos que son comentados.

A lo largo de este amplio apartado se irá comentando uno a uno el centenar largo de problemas seleccionados por presentar en sus respuestas errores similares, típicos y reiterados en grupos de alumnos distintos por edad, por colegio, país, etc., es decir, aleatorizados.

Estos errores repetidos que denominamos sistemáticos, podríamos denominarlos como **errores de sistemática parcial** (no los producen todos los alumnos, ni tan siquiera aquellos que también los fallan), serán puestos bajo la lupa buscando el patrón explicativo que encamina a distintos alumnos hacia el mismo error, de lo que podemos deducir analogías el proceso de pensamiento errático de los alumnos.

La espina dorsal de toda esta información girará en torno a la clasificación de los problemas por categorías y subcategorías según la operatoria que exige su resolución tal como puede verse en la tabla **H12. Categorización de errores en la respuesta: dificultades, tiempos y frecuencias**, del punto **3.3. Categorización de respuestas** en el presente trabajo.

Cada problema que presenta algún error, es decir, todos, tiene una única asignación de tipo de error, pero existen multitud de ocasiones donde la unicidad de la respuesta no se cumple. Dicho de otro modo, existen problemas cuya variedad de respuestas hacen muy lento el proceso de categorización, e intentar reflejar todas las categorías de error de cada uno de forma ponderada a la frecuencia de error sería excesivamente laborioso y tal vez, poco relevante. Así pues, renunciamos al detalle y pormenorización de las equivocaciones para no perdernos en un lento y laborioso proceso de asignación que podría enmascarar una búsqueda eficiente de ciertas categorías de error que vayan más allá de un largo anecdotario.

Sabemos lo que nos dejamos en el tintero pero preferimos escribir antes de que la tinta se haga tan espesa que no permita la escritura. Ya hemos comentado, y lo reiteramos las veces que haga falta, la elección de asignar un problema con un error a una categoría y no a otra, es una decisión que tomamos en base a los criterios de frecuencia y de importancia que se vayan presentando en el laborioso trabajo de filtrado.

El paréntesis que acompaña a los títulos y subtítulos de este apartado muestra el número de problemas de ese grupo, del cual se ofrecen, solo, algunos ejemplos relevantes.

En el epígrafe de cada uno de estos problemas con errores sistemáticos se muestran, de izquierda a derecha, el **n.º del problema**, el **enunciado** del mismo y, entre paréntesis y cursiva, la **respuesta correcta**, un guión y los **pares de valores** separados por dos puntos (a la izquierda, la respuesta errónea y a la derecha su frecuencia). En caso de existir dos o más de estos errores, estos van separados por una doble daga, o diesis doble, U+2021, Unicode versión 1.1, 1993.

4.3.1. Distractores (Dis.246)

El grupo de Distractores está formado por los problemas que no suelen necesitar ningún tipo de cálculo para la obtención de la respuesta. Se trata de problemas cuyo texto muestra unos datos que pueden contener información de forma implícita, es decir, escondidos u ocultos tras conceptos de uso cotidiano (semana implica 7 días, por ejemplo), bien datos presentados en forma literal en vez de numérica (que es lo usual), preguntas a veces capciosas, al menos sorprendentes o que buscan la comprensión total del texto (preguntar por una dato directo del problema).

También el efecto o la presión sobre el resultado que pueden tener el primer y el último dato del problema.

Hemos introducido en nuestros problemas conceptos distorsionadores de los que no es siempre fácil desprenderse. Una palabra cargada de fuerza, sobre todo al final del texto, puede arrastrar hacia un error. Igualmente puede ser una fuente de error la existencia de conceptos distintos pero con ciertas similitudes morfológicas y/o fonéticas o el uso de palabras polisémicas, (cuyo significado ha de ser extraído exclusivamente del contexto).

Generalmente no caer en estas celadas requiere captar la globalidad del problema sin perderse por los detalles de información poco o nada relevante. Pero esta cualidad de percibir la esencia del texto en una primera lectura no está a disposición de todos. Para el resto, se necesita una segunda o tercera lectura que va sirviendo de filtraje comprensivo del texto del problema. Y esto es, desgraciadamente, más posible que real.

Se trata en total de un grupo de poco más de 200 problemas cuya característica más importante es que son fallados no por su dificultad objetiva sino por falta de una lectura ajustada y comprensiva de lo que dice el texto, que suele ser sustituido por lo que el alumno cree que debe decir el texto.

Este tipo de error generado por distractores suele estar muy presente en alumnos más bien primarios, activos, poco reflexivos, algo inmaduros y

poco entrenados en la disciplina y metodología resolutoria. No hemos observado diferencias importantes en el aspecto transversal o evolutivo de la muestra.

Como hemos señalado en los puntos **2.3.2. y 2.4.**, para la asignación de categorías en estos conceptos reiteramos los mismos argumentos de fondo: cuando hemos tenido dudas sobre la tipología de un problema concreto, nos hemos decantado por la opción más relevante, más frecuente o por aquella que hemos juzgado de más interés para este trabajo.

Respecto a los problemas que iremos mostrando escogemos una pequeña muestra de ellos de entre las decenas o centenares de casos similares que existen. Nuestras explicaciones sobre su comportamiento están basadas en anotaciones sobre comentarios de alumnos en tiempo real, de observaciones participantes y del análisis individualizado de los casos.

Esperamos mantener la prudencia ante los comentarios que vayamos haciendo, y deseáramos que no fuesen tomados de una manera dogmática sino orientativa y, en la medida de lo posible, contrastable.

4.3.1.1. Datos ocultos y/o literales (17)

En determinados problemas no se explicita información que se suele dar por oída, conocida y utilizada, pero que no está debidamente asimilada y comprendida por los alumnos. Así pues, en algunos contextos, por ejemplo, se usa la palabra par como conjunto de dos cosas, que los días de la semana son 7 o los meses del año 12, que un gato tiene 4 patas y un pollito dos, y un larguísimo etc. dando por supuesto asociaciones (par: 2, meses/año: 12, pollo: 2 patas...) que no necesariamente están vinculadas, al menos en todos los alumnos.

Unas veces, ante esta ausencia de explicitación y la tendencia general a minimizar obstáculos, el alumno recurre a un patrón mental más cercano que le aleja de la realidad pero le permite rellenar esa dificultad o vacío sin necesidad de ajustarse estrictamente a los conceptos, algo ambiguos para él, que se barajan en el texto.

Por otra parte, la presentación de datos en forma en letra en vez de numéricamente, como viene siendo habitual, influye en la comprensión y resolución del problema. La información literal frente a la numérica de los datos, hace que estos tiendan a no ser percibidos como tales.

Parece que, en la lógica interna del alumno, los datos son presentados en formato numérico y la mecánica resolutoria tiende a dotar a las letras de una cierta ceguera perceptiva de información relevante.

Mostraremos unos cuantos ejemplos para ilustrar estas dificultades de que hablamos.

719. ¿Cuántos dedos tienen 7 pies?**(35 – 14:7 ‡ 70:19)****Observaciones:**

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Corto.

Respuesta correcta: 35 (7×5)

Número de veces ejecutado: 973. De ellas, 890 bien y 83 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 13 segundos (12 en aciertos y 25 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 31% (26 sobre 83).

Comentarios:

Las respuestas falladas (14: 7 veces y 70: 19 veces) apuntan en dos direcciones.

En la primera, 14 (7×2), pensamos que el mecanismo de sustitución ha sido cambiar el dato implícito 5 (cada pie tiene 5 dedos) por otro dado igualmente implícito pero en este caso irrelevante para la resolución del problema, el 2 (número de pies por persona).

En la segunda, 70, con más frecuencia, lo que se ha hecho es multiplicar 7, que parece que ya no han sido pies, sino personas, por 10, que es el número de dedos de pie de cada una.

En ambos casos no se trata de respuestas aleatorias sino que poseen una lógica interna, pero dicha lógica no es la del problema sino la individual basada en los errores de comprensión o de ejecución del problema, es este caso, la utilización de datos que no están presentes en el problema sino que debían venir movilizados a partir del bagaje o contexto del propio alumno.

1035. ¿A cuántos patos corresponden 14 patas de pato?**(7 – 14:12 ‡ 28:32)****Observaciones:**

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 7 ($14/2$)

Número de veces ejecutado: 1084. De ellas, 974 bien y 106 mal. Dificultad: 11%.

Tiempo medio de resolución: 19 segundos (17 en aciertos y 43 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 41% (44 sobre 106).

Comentarios:

La respuesta menos frecuente, 14, el dato directo del número de patos seguramente está influida por la presencia intensiva de los conceptos patas y patos, que permite dar un cierto juego, distorsionador en este caso, con doble significado de pata (femenino de pato y extremidad). Cuando se proyecta una cierta dificultad añadida al problema no es raro ver estos comportamientos de bloqueo que consisten en dar como respuesta el dato que tengamos más a mano para salir del conflicto.

La segunda respuesta, 28, mucho más frecuente, es el resultado de confundir la operación que se ha de realizar. En este caso se ha multiplicado 14 por 2 en vez de dividirlo.

1231. Tomo un litro de agua cada dos días. ¿Cuántos litros tomaré en 12 días?

(6 – 12:29)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 6 (0.5×12)

Número de veces ejecutado: 983. De ellas, 872 bien y 111 mal. Dificultad: 13%.

Tiempo medio de resolución: 18 segundos (15 en aciertos y 38 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 26% (29 sobre 111).

Comentarios:

Tenemos un error sistemático único que cubre la cuarta parte de los errores del problema.

En este caso se ha ignorado el dato *dos días*. Imaginamos que una buena parte de la ceguera del mismo ha sido su presentación en forma literal, es decir, no numérica. Dicha invisibilidad deja el problema expuesto a una única información relevante, los 12 días, que finalmente se ha impuesto como respuesta.

3461. Tres X más 4 es igual a 16. ¿Cuánto vale la X?

(4 – 12:6)

Observaciones:

Curso: 6º Primaria.

Longitud del texto: Corto.

Respuesta correcta: 4 ($16-4/3$)

Número de veces ejecutado: 973. De ellas, 908 bien y 65 mal. Dificultad: 7%.

Tiempo medio de resolución: 14 segundos (13 en aciertos y 26 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 6% (6 sobre 93).

Comentarios:

El texto del presente problema muestra algún dato con información literal, no numérica.

A pesar de que la dificultad del problema (6º Pr.) y por tanto la edad y maduración de los alumnos destinatarios es superior a otros casos vistos, el patrón de comportamiento es idéntico: un dato mostrado en forma de texto, y no numéricamente, no es percibido como tal dato por un número significativo de alumnos que lo ignoran eliminándolo de la operatoria que requiere la correcta resolución: en este caso faltaría dividir justamente por TRES la respuesta obtenida. Tenemos variables intervinientes claras: edad, maduración, motivación, etc, y un hecho incontrovertible: esta especie de ceguera numérica sigue estando presente en cursos altos de la Escolaridad Obligatoria.

4.3.1.2. Preguntas capciosas (89)

Normalmente cuando un problema muestra un dato A y un dato B, la pregunta suele estar relacionada con algo que vincula o conecta A con B. Esto es lo estándar, pero qué ocurre cuando la pregunta es sobre un dato directo y explícito del problema? ¿Son todos los alumnos capaces de detectar esta pequeña maldad? La respuesta es no. Muchos de ellos, seguramente todos pertenecientes al grupo de lectura única del problema, responden a sus propias preguntas no a las que le formula el problema, como vemos en los problemas 973, 2127, 2706... La lista podría ser mucho más larga pero esperamos que esta pequeña muestra sea suficientemente evocadora de las observaciones que queremos dejar reflejadas. Ejemplos Dis2 641 973 2127 2706

641. Tengo 13 bolsas y cada una tiene 3 bolas distintas. ¿Cuántas bolsas tengo?

(13 – 10:11 † 16:22 † 3:9 † 39:82 † 4:15)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 13.

Número de veces ejecutado: 1016 De ellas, 819 bien y 187 mal. Dificultad: 18%.

Tiempo medio de resolución: 21 segundos (14 en aciertos y 51 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 74% (139 sobre 187).

Comentarios:

La necesidad de operar todos los datos que nos presenta el problema es un error recurrente entre alumnos con dificultades de concentración y maduración.

Es como si estos alumnos estuvieran más preocupados en buscar algo que tenga una lógica operatoria con una cierta consistencia y verosimilitud que por comprender lo que el problema les está demandando, que es este caso es un dato directo.

Veamos como se puede llegar a esa lógica operatoria de una forma verosímil.

Respuesta 10, obtenida a partir de 13 bolsas (3 bolas, que no se pueden ni sumar ni restar porque no pertenecen a la misma categoría o no son semejantes).

Respuesta 16 = $13 + 3$. En este caso, como el anterior, también se suman cantidades no semejantes.

Respuesta 3. Pensamos que esta respuesta corresponde al recuerdo del último dato presentado.

Respuesta 39 = 13×3 . La de multiplicar los datos era otra posibilidad ante el lío de bolsas y bolas del problema. Se trata del error favorito del problema.

Respuesta 4. Esta respuesta es resultado de la división $13 / 3$ en la que se ignoran los decimales, no sabemos si por desconocimiento de como se calculan o por otras razones.

973. Tengo 3 cajas con 6 caramelos cada una. ¿Cuántos caramelos hay en una caja?

(6 – 18:81 † 2:63 † 3:7)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 6.

Número de veces ejecutado: 1122. De ellas, 946 bien y 176 mal. Dificultad: 16%.

Tiempo medio de resolución: 19 segundos (16 en aciertos y 37 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 86% (151 sobre 176).

Comentarios:

Otro caso de operar con los datos aunque el problema demanda una respuesta dada en los datos. Su resolución correcta solo exige una lectura comprensiva del texto.

La respuesta 18, la más frecuente de los errores, se obtiene tras multiplicar los datos.

La respuesta 2, que le sigue en frecuencia a la anterior, se obtiene tras dividir el segundo dato por el primero, lo cual, más que preferencia en la elección de cuál es el dividendo y cuál el divisor, obedece a que $6 / 3$ es mucho más fácil de realizar que $3 / 6$.

Por último la respuesta 3, la menos frecuente creemos que obedece al patrón de escoger el primer o último dato mostrado, como veremos en otros momentos con más ejemplos y detalles.

2127. Han pasado 5 años desde la última vez que te vi, en 1991. ¿En qué año te vi por última vez?

(1991 – 1986:38 ≠ 1996:20)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 1991.

Número de veces ejecutado: 938. De ellas, 825 bien y 113 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 16 segundos (12 en aciertos y 43 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 51% (58 sobre 113).

Comentarios:

Continuamos con los ejemplos de problemas con errores relacionados con la falta de comprensión lectora y con más operaciones realizadas de las requeridas.

En este caso, la trampa ha sido el irrelevante dato 5.

En la primera respuesta (1986), el 5 ha sido restado al dato–respuesta (1991), con doble frecuencia que la segunda (1996) en la cual los dos números han sido sumados.

2706. Si yo tardo 5 minutos en cocer un huevo. ¿cuánto tardaré en cocer 6 huevos echados al agua hirviendo al tiempo?

(5 – 30:37)

Observaciones:

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 5.

Número de veces ejecutado: 854. De ellas, 775 bien y 79 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 13 segundos (11 en aciertos y 36 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 47% (37 sobre 79).

Comentarios:

Se trata del último problema de la categoría Distractores–Preguntas capciosas.

En él podemos ver que la dificultad y/o curso no es baja pero que el patrón se sigue dando más allá de alumnos de primeros cursos de Primaria o con déficits de maduración en su escolaridad.

El error continúa asentándose en la dificultad de comprensión lectora de los textos que suele preceder a la operatoria de los números del enunciado sin otras consideraciones, filtros ni contrastes que verifiquen la respuesta.

En este caso el error sistemático significativo ha sido multiplicar ambos números. Ello implica, al menos, la necesidad de cocer los huevos uno por uno. No sabemos si, en su caso, además procedería cambiar el agua hirviendo por agua fría para cada uno de los 6 huevos...

4.3.1.3. Confusores (33)

Existe una pequeña, pero significativa, cantidad de problemas en los cuales se nombra una palabra con mucha fuerza pero cuyo contexto enmascara o esconde su verdadero significado o valor.

Utilizar la palabra más como parte de un texto en el que la resolución y el contexto exige la operación resta, o viceversa, y lo mismo con los conceptos de producto y cociente, aparte de ser una trampa que indica nuestra maldad (dicho sea de broma), puede indicarnos la solidez o volatilidad de los conceptos en la mente del alumno. Estos problemas son muy fallados en términos generales, y como hemos dicho (y seguiremos diciendo) más que aparecer de manera específica en un grupo de alumnos, aparece de forma acumulada en alumnos que cometen también otros muchos tipos de fallo, cuyo denominador común es una falta de lectura atenta generalmente asociada a la prisa por quitarse de delante una tarea por la que no se siente motivación ninguna y una desgana bastante evidente.

Ejemplos: Dis3, 875, 1566, 3099

875 . ¿Cuánto tendré que sumar a 25 para que me dé 33?

(8 – 18:6 ≠ 58:11 ≠ 7:10)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 8 (33-25).

Número de veces ejecutado: 1118. De ellas, 1009 bien y 109 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 23 segundos (21 en aciertos y 44 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 25% (27 sobre 109).

Comentarios:

En este problema aparecen tres respuestas consideradas errores sistemáticos, que son 18, la primera, 58 la segunda y 7 la tercera.

Comenzamos por la tercera respuesta, la 7 y la primera, 18. Ambas tienen un mismo componente de error. Se trata de un error operatorio, de confusión en el cálculo de la resta. $33 - 25 = 7$ en el primer caso y $33 - 25 = 18$, en este caso con las que se lleva. En ambos casos se trata de un fallo digamos de tipo mecánico. Hay un fallo en el cálculo, pero no en el concepto de lo que hay que hacer para resolver el problema.

Contrariamente, la segunda respuesta, 58, la que alcanza la mayor frecuencia de error no muestra un fallo mecánico sino de concepto.

Para los alumnos que han dado esta respuesta la presencia de la palabra sumar ha desviado la atención y el foco y les ha desprotegido frente a la fuerza de la palabra. Y es que no siempre lo que se ve es todo lo que hay, ni las letras de la palabra SUMAR, ordenadas correctamente, significa que haya que sumar.

1566. ¿Por qué número tienes que multiplicar 9 para que de 72?

(8 – 9:6)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 8 (72/9).

Número de veces ejecutado: 1070. De ellas, 1009 bien y 61 mal. Dificultad: 6%.

Tiempo medio de resolución: 13 segundos (11 en aciertos y 36 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 47% (37 sobre 79).

Comentarios:

Tenemos un ejemplo que explicita la palabra que no se corresponde con la operación requerida.

Se expresa con nitidez el vocablo multiplicar cuando lo que se debe utilizar es una división.

La dificultad de este problema es ligeramente superior al anterior (3º o 2º de Primaria) aunque el salto en dificultad comprensiva y operatoria de la suma con respecto al producto es muy notorio puesto que aparte de la complejidad del concepto exige el recuerdo memorístico de las tablas de multiplicar, que no es un tema menor.

Y si no es fácil multiplicar, dividir lo es mucho menos.

La respuesta 9 que tenemos, de muy poca frecuencia (de hecho 6 es la frecuencia mínima a la que asociamos errores sistemáticos), es más que probable que refleje una respuesta (el primer dato del problema) por falta de conocimientos tanto para multiplicar como para dividir ambas cantidades. Se trataría de la respuesta más a mano frente al bloqueo para resolver el problema correctamente

3099. ¿A qué número le quitaré 12.3 para que se obtenga 15.8?

(28.1 – 3.5:14)

Observaciones:

Curso: 6º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 28.1 (12.3+15.8).

Número de veces ejecutado: 864. De ellas, 797 bien y 39 mal. Dificultad: 5%.

Tiempo medio de resolución: 14 segundos (12 en aciertos y 39 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 21% (14 sobre 67).

Comentarios:

Otra vez se muestra otro confusor, quitaré (restaré), cuya sugerencia es totalmente equívoca para la obtención de la respuesta correcta.

En este caso, el problema se presenta en un curso elevado de Primaria, para alumnos de 11 o 12 años o de equivalente madurez.

Esa madurez garantiza, según los resultados obtenidos, una corrección en los cálculos de restar incluso con decimales. Es cierto que dichos cálculos no conllevan ninguna dificultad añadida por llevarse una a la cifra siguiente, lo que constituye una potente fuente de errores.

Vemos nuevamente que se salta el obstáculo de la dificultad mecánica u operatoria, pero aún en 6º de Primaria podemos percibir confusiones y errores en el uso del concepto de adición y sustracción. Aún existen dificultades para domesticar una palabra hasta convertirla en una idea coherente y ajustada dentro del enunciado de un problema.

4.3.1.4. Presión del primer (65) o último dato (42)

La cercanía de un dato al inicio o al final del texto del problema parece que puede causar, a veces, una especie de sobrepeso o de presión del mismo sobre la comprensión del texto pudiendo actuar de diferentes maneras, desde enmascaramiento hasta ocultación de otros datos pasando por la sustitución u omisión de operaciones.

Esta presión se suele dar con más frecuencia en inicios que en finales de problema, es más activa en textos largos que cortos y en aquellos que presentan alguna dificultad comprensiva más que sobre los que se pueden considerar más sencillos.

Viene a jugar una especie de solución fácil o de salida fácil a una situación de dificultad a mitad de camino entre el total pasotismo (zafarse del conflicto respondiendo con un 0) y la asunción de la dificultad, dedicación y esfuerzo como parte de la obtención de la respuesta.

Ejemplos: Dis4, 551, 800, 1056, 1580.

551. En el bar Goyo había 13 pollos fritos. Se sirvieron 2; vendieron para llevar 4; y regalaron otros 6. ¿Cuántos quedan ahora? (1 – 13:6)

Observaciones:

Curso: 1º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 1 (13-2-4-6).

Número de veces ejecutado: 1037. De ellas, 933 bien y 39 mal. Dificultad: 4%.

Tiempo medio de resolución: 22 segundos (21 en aciertos y 39 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 15% (6 sobre 39).

Comentarios:

Se trata de un problema de texto largo para niños pequeños. Pese a ello, presenta una baja dificultad a pesar de requerir dos operaciones de resta que generalmente se realizan, sobre el total y total parcial de los pollos fritos, de forma secuencial. Por lo que hemos observado y consta en nuestra anotaciones de observación directa, no es frecuente juntar las cantidades a restar y quitarlas del total (utilizar la propiedad asociativa), al menos en los alumnos más pequeños. Como vemos, el error sistemático asociado a esa pequeña dificultad del 4%, es devolver esa primera cifra que muestra el problema: los 13 pollos iniciales.

800. Un salón tiene 4 cuadros en cada una de sus 4 paredes. ¿Cuántos cuadros hay en las 4 paredes?

(16 – 1:15 ‡ 4:44 ‡ 8:16)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 16 (4×4).

Número de veces ejecutado: 1021. De ellas, 897 bien y 124 mal. Dificultad: 14%.

Tiempo medio de resolución: 19 segundos (15 en aciertos y 46 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 60% (75 sobre 124).

Comentarios:

En este caso se presenta un problema de dificultad algo superior donde la presión y redundancia del número 4 es muy potente y, seguramente, reduce la comprensión global del problema que como vemos exige operatoria selectiva de los datos del problema. Uno de los 4 del texto, que es redundante, ha de quedar excluido de la operación.

Las respuestas muestran tres errores sistemáticos si bien con distintas incidencias y frecuencias.

Las respuestas 1 ($1 = 4 / 4$) y 8 ($8 = 4 + 4$), primera y tercera respectivamente, de menores frecuencias, obedecen a operatorias erróneas (división y suma).

La respuesta segunda, la 4, que triplica las otras dos, significa tomar uno de los datos directos (en este caso concreto puede ser el primero, el último, incluso el del medio) y darlo como respuesta, lo que permite evadirse de paredes y cuadros de una forma ágil y sin aparentar demasiado desinterés.

1056. ¿Cuántas docenas de niños hay en 36 niños?

(3 – 12:13 ‡ 2:8 ‡ 432:10)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 3 ($36/12$).

Número de veces ejecutado: 1047. De ellas, 949 bien y 92 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 20 segundos (18 en aciertos y 39 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 34% (31 sobre 92).

Comentarios:

De las 3 respuestas descartamos la segunda, el 2, porque no podemos dar una explicación con un mínimo de verosimilitud

Respecto a la primera, 12, se trata de una respuesta directa que se da al enunciado a través de la palabra docena, que además figura casi en primer término. Podríamos decir que es lo primero con lo que se choca el alumno que comienza a leer el texto.

La tercera respuesta, 432, es el resultado de multiplicar los datos que presenta el problema y que poco tiene que ver con la pregunta que se plantea.

1580. ¿Cuántas naranjas tendré con 12 medias naranjas?

(6 – 12.6)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 6 (12×0.5).

Número de veces ejecutado: 1329. De ellas, 1228 bien y 101 mal. Dificultad: 8%.

Tiempo medio de resolución: 17 segundos (16 en aciertos y 28 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 6% (6 sobre 101).

Comentarios:

Tal vez el punto de mayor dificultad que aporta este problema es introducir el concepto medio o mitad aplicado en este caso a un objeto común como es la naranja.

No se presentan unidades de naranja sino mitades de naranja para calcular las primeras a través las segundas. Es decir el problema plantea la operatoria directa, sea cual sea, a mitades de naranja, hace operar con medios. Y esta es la dificultad.

Una dificultad que puede cursar de dos o tres maneras, a nivel conceptual (no tener totalmente claro y definido el concepto mitad (que se puede confundir con doble, como veremos más adelante), a nivel mecánico (como operar –sumar, restar.– con medios) e incluso a ambos niveles al tiempo, como si lo mecánico y lo conceptual formaran parte de la misma maraña, de la misma dificultad.

No se trata de una gran tasa de errores sistemáticos sobre el total de ellos, pero sí que ayudan a conformar y/o confirmar una cierta tendencia en la sistematicidad del fallo.

4.3.2. Conceptos erróneos (Edc.574)

Denominamos errores de concepto los correspondientes a este punto porque son usados de forma errónea más veces de las que sería explicable por puro azar. Incluye una amplia gama o conjunto de vocablos no relacionados directamente entre ellos, excepto por su mal uso, imprecisión o confusión.

Hay errores de uso cotidiano (docena, par, semana, etc...), otros más bien de tipo matemático (sumando, dividiendo, denominador, redondeo, raíz, potencia, etc...), también el uso adecuado de los signos mayor, menor e igual, en la obtención de un término de una seriación o serie numérica, en el manejo de las propiedades en las operaciones básicas (asociativa, conmutativa y distributiva) o en el uso de términos como opuesto, inverso, fracción e identificación de sus elementos y una prolija lista que iremos comentando.

Y también los confusores, errores muy interesantes, basados en muestras no muy grandes de problemas, pero que consideramos de mucho interés.

En general este tipo de fallos (más cercanos al desacierto que al lapsus) afectan a un grupo de unos 600 problemas, que los presentan con distintos matices y en diferentes contextos y que tienen un mismo denominador común: un error por desconocimiento o imprecisión del término en cuestión.

Respecto al tipo de alumnos que cometen este tipo de errores nos remitimos a lo comentado en el punto 4.3.1. y servirá también para los siguientes

subapartados de punto **4.3 Errores Sistemáticos**. Se trata de alumnos que, sin llegar a mostrar niveles de inmadurez o déficits escolares excesivamente serios, muestran una cierta relajación en los hábitos de comportamiento, en la disciplina y en la falta de interés por el trabajo bien hecho. Como si alguien le hubiese estado repitiendo millones de veces que lo importante es participar y lo secundario, esforzarse por conseguir unos resultados, sino buenos, al menos gratificantes para ellos y saludables para mejorar su necesaria autoestima como alumno y como persona.

Pero este es otro tema. Es el tema del gran negocio de la enseñanza obligatoria, donde tan caro sale el gramo de conocimiento adquirido de la *pedagogía oficial* instalada en nuestros ministros de educación/almacenaje, profesores/colegas y padres/amigos, y sobre todo, en las cuatro editoriales de pingües beneficios que editan y editan libros sin valor añadido, es decir libros de usar y tirar (que no sirven para el hermano que viene detrás) y asesores, también oficiales, liberados de la dura tarea de ser profesor a pie de aula o de lo que sea.

Decíamos que la tipología aproximada de los alumnos que cometen, con frecuencia alta, fallos en este tipo de problemas en particular (y de los problemas en general) muestra una cierta dejación por el trabajo bien acabado, un *vale cualquier cosa, o todos los resultados son igualmente buenos*. Esta parece ser la idea rectora en sus mentes y que su comportamiento (obviamente sin generalizar) suele mostrar, es decir, una falta de sincronía o desajuste entre la responsabilidad exigible a sus acciones o decisiones, evidentemente acomodando la escala acción y la responsabilidad a la que se corresponda como óptima por su edad o maduración.

Son, sin generalizar, poco reflexivos, más bien primarios, con algún tipo de inmadurez social, poco perfeccionistas, con poca tolerancia a la dificultad, etc. etc.

Es difícil observar errores sistemáticos asociados exclusivamente a una tipología de alumno como también lo es encontrar alumnos que cometan exclusivamente algún tipo de error sistemático, aunque sí existen determinadas preferencias.

4.3.2.1. Conceptos cotidianos (267)

A diferencia de los **Datos ocultos**, ya comentados, que detectaban la falta de asociación entre conceptos unidos intrínsecamente (par/conjunto de dos, semana/7 días, etc), en este punto buscamos las confusiones entre muchos conceptos cotidianos que se dan por sabidos para un grupo de edad pero que no lo son, o si preferimos, no son comprendidos con la precisión que se requiere.

Confusión entre la docena y la decena, la confusión espacial entre dere-

cha e izquierda o temporal entre anterior y posterior, etc, son solo algunos ejemplos de lo que queremos mostrar. Son conceptos que sin resultar novedosos a los alumnos, a la hora de ser usados, lo son incorrectamente no pocas veces.

Ejemplos: Edc1, 1527, 1561, 1779

1527. ¿Cuál es el número que tiene a la derecha un 4, a la izquierda un 3 y entre ambos un 5?
(354 – 2:9 ‡ 345:10 ‡ 453:38)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 354 (354).

Número de veces ejecutado: 1032. De ellas, 914 bien y 118 mal. Dificultad: 13%.

En este caso podemos ver que están relacionados directamente con la comprensión del texto. Los conceptos izquierda, derecha y centro pueden convertirse en verdaderos handicaps frente al correcto significado del texto.

La primera respuesta, el 2, puede corresponder a la de un número menor que los tres propuestos, o el que está a la izquierda del tres, etc, etc.

La respuesta 345 es una respuesta incorrecta parcial donde el 3 está colocado en su sitio y los otros dos números, los correspondientes a centro y derecha, cambiados.

Por último, la tercera, 435, con el doble de errores que las otras dos respuestas juntas, presenta nitidamente la confusión entre ambos conceptos.

Resumiendo, más del 10% de la población de en torno a 8 o 9 años de edad mental tiene dificultades para distinguir, utilizar o aplicar correctamente los significados de la lateralidad.
mpo medio de resolución: 17 segundos (15 en aciertos y 30 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 48% (57 sobre 118).

Comentarios:

En este caso podemos ver que están relacionados directamente con la comprensión del texto. Los conceptos izquierda, derecha y centro pueden convertirse en verdaderos hándicaps frente al correcto significado del texto.

La primera respuesta, el 2, puede corresponder a la de un número menor que los tres propuestos, o el que está a la izquierda del tres, etc, etc.

La respuesta 345 es una respuesta incorrecta parcial donde el 3 está colocado en su sitio y los otros dos números, los correspondientes a centro y derecha, cambiados.

Por último, la tercera, 435, con el doble de errores que las otras dos respuestas juntas, presenta nitidamente la confusión entre ambos conceptos.

Resumiendo, más del 10% de la población de en torno a 8 o 9 años de edad mental tiene dificultades para distinguir, utilizar o aplicar correctamente los significados de la lateralidad.

1561. Cada trimestre me mandan 5 quesos. ¿Cuántos quesos recibo en un año?

(20 – 15:38 ÷ 60:10)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 20 ($5 \times (12/3)$).

Número de veces ejecutado: 942. De ellas, 841 bien y 101 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 16 segundos (14 en aciertos y 39 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 48% (48 sobre 101).

Comentarios:

El presente problema muestra el concepto trimestre a alumnos de ciclo medio de Primaria (3º) en un contexto cotidiano. Se trata de operar con el significado de ese concepto, es decir, con los meses que contiene un trimestre.

Casi la mitad de los errores que se producen en este problema podemos considerarlos sistemáticos. Obedecen a un cierto patrón lógico por más que sea incorrecto.

La primera respuesta, 15, la más frecuente, creemos que está calculada a partir de 3 (de trimestre) $\times$ 5. Se han extraído los datos y dentro de una incomprensión de lo que se está pidiendo, se multiplican.

La segunda, 60, creemos que es el resultado de 5×12 , es decir, los quesos por el número de meses que tiene un año. Utilizar los meses del año en vez de los que indica el trimestre bien podría indicar lagunas y deficiencias en el uso del concepto.

1779. ¿Cuántos pares de ojos tienen un total de 14 conejos pequeñitos?

(14 – 2:8 ÷ 28:100)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 14 ($14 \times 2/2$).

Número de veces ejecutado: 972. De ellas, 816 bien y 166 mal. Dificultad: 20%.

Tiempo medio de resolución: 14 segundos (11 en aciertos y 31 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 65% (108 sobre 166).

Comentarios:

El vocablo par se asocia al número dos y esto está bastante adquirido. Ahora bien, cuando hemos de operar con el contenido del concepto, por ejemplo pasar de una totalidad a pares o de pares a la totalidad, vemos que aparecen confusiones entre el uso correcto de las operaciones producto y cociente.

En este caso, la primera respuesta dada, 2, muy minoritaria en frecuencia si la comparamos con la segunda, se corresponde con el valor del par, pero no con lo que demanda el problema. ¿Se trata de dar una respuesta algo más *trabajada* que el 0 para pasar a otro problema? Puede ser, pero lo cierto es que no se ha comprendido el problema, o si se ha comprendido, no se sabe resolver. Lo que sí se sabe es que par significa 2.

La segunda respuesta, 28, es el resultado de 14 por 2, y lo dan 100 personas el 65% de los errores totales producidos en un problema de una dificultad del 20%, es decir, lo falla uno de cada 5 alumnos de 8 o 9 años.

Seguramente, relacionado con esa alta dificultad comentada, esté el hecho de haber introducido en el texto algunos obstáculos adicionales de interés como *conejos pequeñitos* (que puede poner en cuestión si el número de ojos en los conejos pequeños es menor que en los grandes), o dar por supuesto el hecho de saber que el número de ojos de un conejo es 2, es decir, un par.

4.3.2.2. Seriaciones (116)

Obtener el término con el que continúa una serie dada o averiguar el término que falta en ella implica conocer la ley de formación interna de la misma, que se suele obtener por tanteos de ensayo error basados en observaciones hechas a los términos que la componen.

La dificultad para encontrar ese número pone a prueba la capacidad analítica del alumno frente a la serie y creemos de interés saber si puede hablar de una pauta de comportamiento frente a las dificultades para obtener ese término enésimo.

Existen comportamientos variados que van desde incomprensión de la orden hasta la incapacidad de obtener el resultado. Los refugios ante tales dificultades son múltiples. Unas veces se suman todos los términos dando el resultado como respuesta, otras, eludiendo el término pedido y sustituyéndolo en su lugar por un primer elemento de la serie, inventado, que es obtenido de forma mucho más fácil. Incluso, llegando a ignorar la inversión que significa el signo menos en una ordenación de mayor a menor.

Ejemplos: Edc2. 712, 2470, 2829

712. Mira la serie: 16 / 14 / 12 / 10 / ¿qué número viene ahora?

(8 – 11:8 ± 18:26 ± 9:6)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 8 (10-2).

Número de veces ejecutado: 1218. De ellas, 1093 bien y 125 mal. Dificultad: 11%.

Tiempo medio de resolución: 17 segundos (15 en aciertos y 33 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 32% (40 sobre 125).

Comentarios:

La observación de las series numéricas es un paso previo, necesario pero no suficiente, para descubrir la ley de formación de la misma y poder conocer cuales son los elementos siguientes o anteriores a los mostrados. La dificultad intrínseca para descubrir esa ley de formación es una medida del nivel de abstracción que ha sido y es utilizada por la mayor parte de las pruebas diseñadas para medir la inteligencia o C.I.

Tenemos tres respuestas, y a ello seguramente ha contribuido ese *ahora* final que no explicita ni a continuación, ni a la derecha. Es decir, el alumno ha de ser capaz de utilizar correctamente el sentido de la escritura es de derecha a izquierda, cosa que hace habitualmente, pero que no tiene suficientemente integrado hasta el punto de aplicarlo en la serie.

La respuesta 11 tiene de positivo que continua por la derecha, pero no se ha descubierto la ley de formación y en ausencia de ella se añade 1 en vez de restar 2.

En la segunda respuesta, 18, la más frecuente, no se interpreta correctamente el sentido u orientación de la serie. Ello le lleva a los alumnos, no a restar 2 al último elemento de la serie sino a sumar 2 al inicialmente primero, sustituirlo y convertirlo en segundo. La respuesta 9, la tercera, resta 1 al último elemento para conseguir el siguiente en vez de 2 como sería lo correcto.

2470. ¿Con qué número continua la serie: 512 / 256 / 128 / 64?

(32 – 1024:11)

Observaciones:

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 32 (64/2).

Número de veces ejecutado: 909. De ellas, 826 bien y 83 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 20 segundos (17 en aciertos y 47 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 13% (11 sobre 83).

Comentarios:

El problema muestra una serie descendente donde cada término nuevo es la mitad del anterior.

En él vemos muy claro algo que ya apareció en los comentarios del anterior: buscar el primer término (a la izquierda de la serie) en vez de continuarla (seguirla por la derecha).

Se trata de un error curioso. No hay confusión en el cálculo de la ley de formación, puesto que se halla correctamente, pero no se hace en el lugar adecuado puesto que no se tiene claro el origen ni la continuidad de la serie.

Pensamos que, tal vez, la falta de práctica escolar en este tipo de ejercicios pueda tener algo que ver con este comportamiento fallido.

2829. Ordena de mayor a menor la serie de números: (1) 6 / (2) - 4 / (3) - 3 / (4) - 5 / (5) 7.

(51324 – 42315:9 ≠ 5:6 ≠ 5:1:17)

Observaciones:

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 51324 (51324).

Número de veces ejecutado: 857. De ellas, 762 bien y 95 mal. Dificultad: 11%.

Tiempo medio de resolución: 14 segundos (10 en aciertos y 44 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 44% (42 sobre 95).

Comentarios:

El texto de este problema presenta dos dificultades manifiestas que seguramente estarán implicadas en las respuestas de los alumnos.

La primera es que el formato no es el utilizado de forma estándar: se dan unos valores asociados a unos ordinales y se ha responder en base a los ordinales, no a los datos y eso plantea sus dificultades.

La segunda es que los datos sobre los que se trabaja ya no son números naturales sino enteros, es decir, también negativos, cuya ordenación de mayor a menor se rige de forma contraria a como lo hacen los naturales (los negativos de mayor absoluto no son los mayores como en los naturales, sino los menores).

La primera respuesta, 42351, parece reflejar que se ha entendido lo que se ha de hacer aunque finalmente no se haya hecho bien, sino totalmente en espejo, es decir, confundiendo los términos mayor y menor.

4.3.2.3. Uso de signos (69)

Los errores en el uso de los signos mayor y menor, la confusión entre uno y el otro, está muy presente cuando se utilizan los signos, no las palabras definidoras de los conceptos. Es decir, no hay problemas de asociación entre *mayor* y *más grande* o *menor* y *más pequeño*, sino entre los símbolos $>$ (*mayor* o *más grande*), y $<$ (*menor* o *más pequeño*). No falla el concepto sino su emparejamiento al símbolo. Es bastante comprensible la confusión de los símbolos, pues su similitud y su simetría vertical juegan en contra de facilitar la diferenciación. Generalmente desaparece el error cuando el alumno, de la mano del profesor/adulto o por su cuenta, crea alguna estrategia eficaz para vincular o asociar símbolos y conceptos. En todo caso no se trata de un tipo de error específico y aislado sino que es otro más asociado a déficits de maduración, falta de motivación, dispersión, etc.

Es cierto que el dominio de estos conceptos requiere un cierto nivel de abstracción y que este tipo de problemas, generalmente cortos de longitud pero densos, no son fácilmente comprendidos ni resueltos. Incluso, no es infrecuente observar fallos que han de ser remitidos a otros errores que nada tienen que ver con estos conceptos sino con el uso del sistema decimal o del conjunto de los enteros, por ejemplo.

Tampoco es raro que el alumno evite la respuesta donde entran en juego estos conceptos (con letras (palabras) o con símbolos) sin atenderse en absoluto a la pregunta. La diversidad de respuestas y la creatividad de alguna de ellas merecerían análisis más detallados que se escapan a nuestro objetivo. Baste, como muestra de lo que decimos, los casos que mostramos más abajo.

Ejemplos: Edc3, 400, 1095, 1955

400. Escribe el número menor de los tres siguientes: 48 / 35 / 71.

(35 – 47:9)

Observaciones:

Curso: 1º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 35 (35).

Número de veces ejecutado: 1107. De ellas, 972 bien y 135 mal. Dificultad: 14%.

Tiempo medio de resolución: 18 segundos (14 en Aciertos y 52 en Fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 6% (9 sobre 135).

Comentarios:

Se trata de un problema sencillo, para alumnos de 6 o 7 años (1º de Primaria) con una dificultad media que manifiesta la dificultad para identificar u ordenar de forma correcta los valores o cardinales de los números naturales, en este caso, menores de 100. El error (47) bien podría explicarse por ser menor que 48, primer número de la serie, lo que incluye ignorar el resto del problema (los tres siguientes).

El tiempo dedicado a los problemas fallados multiplica casi por 4 al de los acertados, lo que nos lleva a pensar que no se trata de fallos casuales o anecdóticos. Son pocos errores sistemáticos dentro de los totales (6%) pero de bastante peso a juzgar por el tiempo de dedicación.

1095. ¿Cuál de los tres siguientes signos es el que corresponde a menor: (1) $>$ / (2) $<$ / (3) $=$?

(2 – 1:61 ± 3:8)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 2 (2).

Número de veces ejecutado: 1037. De ellas, 903 bien y 134 mal. Dificultad: 15%.

Tiempo medio de resolución: 16 segundos (12 en aciertos y 38 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 51% (69 sobre 134).

Comentarios:

Este problema, orientado a niños pequeños de 7 u 8 años (2º de Primaria), va orientado a conocer las deficiencias de identificación correcta de los signos mayor, menor e igual que poco a poco van introduciéndose en el marco conceptual y lenguaje simbólico-matemático de los alumnos. La observación directa de su trabajo nos muestra que las confusiones entre los signos mayor/ $>$ y menor/ $<$ permanecerá un largo periodo en la Enseñanza Primaria y también en la ESO, sin poder llegar a considerarlos desaparecidos definitivamente, de forma total. No así el de la igualdad, de adquisición más rápida.

1955. ¿Qué signo pondremos entre 0.14 y 0.107? (1) $<$ / (2) $=$ / (3) $>$

(3 – 1:49 ± 2:6)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 3 (3).

Número de veces ejecutado: 1006. De ellas, 901 bien y 105 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 15 segundos (13 en aciertos y 30 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 52% (55 sobre 105).

Comentarios:

Unos cursos más tarde (4º de Primaria, –9 o 10 años–) se va haciendo necesario aplicar los conocimientos de la identificación correcta de los signos a situaciones concretas. En este, además de dicha identificación, se introduce otra componente de dificultad que es el uso de decimales que hace más dificultoso asignar los valores de las cifras en base a su posición tras la coma.

4.2.3.4. Propiedades y operaciones (35)

En este punto nos referiremos al manejo de las propiedades básicas de las operaciones que facilitan un uso óptimo de las mismas. Los obstáculos derivados de su uso incorrecto tienen, no pocas veces, efectos análogos tan perversos como el desconocimiento de la operatoria de las cuatro reglas. Así, por ejemplo, desconocer y no aplicar las propiedades asociativa o conmutativa en la suma y el producto puede ser tan nefasto como hacerlo con la resta o la división.

Respecto a los fallos en la ejecución correcta de propiedad distributiva que actúa de puente entre suma/resta y producto/cociente, hemos de decir que presentan mayor complejidad que los comentados anteriormente y que perduran más en el tiempo, manteniéndose con mayor frecuencia tras el paso por los 10 años de enseñanza obligatoria. El trasfondo de todos estos errores es que existen deficiencias en el correcto uso de los paréntesis y no se tienen claras la jerarquía y las prioridades operatorias.

Ejemplos: Edc4, 2320, 3328

2320. Calcula el valor de la expresión: $3 \times (15 + 5) - 4 \times (3:1)$.

(48 – 168:19 ‡ 42:7 ‡ 56:6)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: $48 (3 \times 20 - 4 \times 3)$.

Número de veces ejecutado: 909. De ellas, 808 bien y 101 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 19 segundos (15 en aciertos y 51 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 32% (32 sobre 101).

Comentarios:

Coincidiendo con hallazgos psico-evolutivos de Piaget sobre descentramiento, conservación de la cantidad, reversibilidad y otros sobre el pensamiento infantil, que recomendamos como sumamente interesantes, y en paralelo, la escolaridad Primaria va abordando primero la mecanización de la operatoria básica y después la regulación de las mismas a través de las propiedades que las relacionan entre sí.

En este caso se trata de una operación que implica dos secuencias de operaciones que conllevan ciertas jerarquías y reglas representadas por la presencia de los paréntesis. La edad de los alumnos es de 9 o 10 años (4º de Primaria) y los errores superan el 10%.

3328. ¿Equivale $6 \times (7+5)$ a $(6 \times 7) + (6 \times 5)$? ¿Se cumple la propiedad distributiva? (1) sí / (2) no. (1 – 2:7)

Observaciones:

Curso: 6º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 1 (1).

Número de veces ejecutado: 848. De ellas, 776 bien y 72 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 13 segundos (11 en aciertos y 35 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 10% (7 sobre 72).

Comentarios:

El problema plantea la propiedad distributiva en su forma más simple. En línea con los comentarios realizados en el problema anterior, un 10% de los alumnos no la identifican correctamente, es decir, le falta un mínimo de soltura para relacionar de forma ágil y efectiva números y operaciones básicas. Recordamos que estos alumnos ya han estado escolarizados 3 cursos en Preescolar y 6 en Primaria Obligatoria, en total 9 años lo que equivale a unas 10000 hora de clase. Estamos en finales de Primaria, 11 o 12 años.

Ir manejando adecuadamente la conmutativa, asociativa y distributiva, es decir, utilizar de forma parcial, selectiva y adecuada estas propiedades de las operaciones con los números, al tiempo que se van dejando intuir las sucesivas ampliaciones y el conjunto de los mismos (Naturales > Enteros > Racionales > Irracionales > Complejos), es una larga y compleja tarea que ocupa todo el periodo de la escolaridad obligatoria (Primaria y ESO). Todo ello sin que podamos afirmar que al final del recorrido hayamos conseguido nuestro propósito, ni tan siquiera que estemos cerca de lograrlo.

4.2.3.5. Fracciones (39)

Hacia los nueve o diez años los niveles de maduración de los niños han llegado a un punto que pueden comprender el concepto de fracción, distinguir los términos que la definen, su significado y su operatoria. No obstante, una buena parte del alumnado plantea deficiencias serias en su comprensión y aplicación correcta.

Numerador (el qué parte) y denominador (del qué total) son confundidos e intercambiados no pocas veces y sus respectivos significados no son captados correctamente por todos los alumnos ni en cursos bastante altos de la escolaridad obligatoria.

También hemos observado dificultades en el cálculo de la fracción de una cantidad y en los cálculos derivados de tal resolución, en los que frecuentemente se sustituye el por por el partido como veremos en algunos de los casos que ahora veremos.

Ejemplos: Edc5, 1368, 3389

1368. En la fracción $\frac{6}{4}$ ¿cuál es la cantidad repartida: 6 o 4

(6 – 2:6 ≠ 4:98)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 6 (6).

Número de veces ejecutado: 1027. De ellas, 887 bien y 140 mal. Dificultad: 16%.

Tiempo medio de resolución: 16 segundos (13 en aciertos y 34 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 74% (104 sobre 140).

Comentarios:

El concepto de fracción, el manejo de sus componentes y su operatoria particular, tienen una dificultad suficiente como para ocupar una buena parte del tiempo dedicado a su aprendizaje a lo largo de todo el periodo obligatorio de enseñanza.

Hacia la mitad del período de Primaria comienzan las primeras aproximaciones al concepto, que irán dando paso a la mecánica e incorporación como herramienta de uso cotidiano.

El problema valora la comprensión básica de lo repartido (numerador) y entre los que se reparte (denominador).

Algunos alumnos, pocos, muy lejanos a la comprensión de lo que es la fracción, dan la respuesta 2, obtenida restando ambos números.

La mayoría de los errores sistemáticos cometidos (74%) resultan de confundir el número entre los que se reparte con lo repartido.

3389. ¿Cuánto son los $\frac{4}{2}$ de 125?

(250 – 62.5:6)

Observaciones:

Curso: 6º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 250 ($125 \times \frac{4}{2}$).

Número de veces ejecutado: 824. De ellas, 768 bien y 56 mal. Dificultad: 7%.

Tiempo medio de resolución: 12 segundos (11 en aciertos y 27 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 11% (6 sobre 56).

Comentarios:

A finales de la Primaria la asimilación de los conceptos sobre fracciones debería haber llegado a un grado de madurez que permitiera aplicarlos y hacerlos operativos en situaciones cotidianas concretas. Y además de lo conceptual, y como una dificultad añadida, está el tema no menor de dominar toda una serie de técnicas o habilidades mecánicas que las regulan.

En el caso concreto de este problema, tenemos dos aspectos de interés que comentaremos:

Primero. Que en lenguaje matemático el texto del problema se traduce en *Cuánto es $\frac{4}{2}$ POR 125* y no partido, sumado o restado, es decir escoger bien la operación.

Segundo. Para multiplicar $\frac{4}{2} \times 125$ se ha de saber que $125 = 125/1$ (que los Naturales son Racionales o que todo natural es equivalente a una fracción con numerador dicho número y denominador 1) y además que el nuevo numerador es el producto de los numeradores y el nuevo denominador, el producto de los denominadores.

Más de un 10% de alumnos de 6º de Primaria falla este problema. Unos por el concepto o la mecánica, otros porque les resulta más raro cuatro medios que dos cuartos, razón que consideran de peso para darle la vuelta.

4.2.3.6. Otros conceptos (48)

Incluimos en esta categoría de errores, diferentes términos todos ellos relacionados de forma genérica con el lenguaje matemático y más concretamente con el léxico propio o vinculado a las operaciones básicas o usuales y que no han sido incluidos en ninguno de los grupos anteriores.

Los fallos, imprecisiones, confusiones entre palabras como: sumando, dividendendo, denominador, redondeo, raíz, potencia, índice, exponente u otras, o acciones como redondear por exceso o por defecto, están incluidos en este grupo.

La muestra de esta categoría se basa en un pequeño grupo de problemas pero muy activo desde el punto de vista de los errores, que se detectan a través de la RP pero cuyo fondo ha de ubicarse en el profundo y pantanoso campo de la semántica y del significado léxico en el cuál la pobreza e imprecisión de vocabulario juega un papel determinante.

Ejemplos: Edc6, 2105, 2765, 3413

2105. Redondea a decenas el número 129 (13 – 100:7 ‡ 12:27 ‡ 12.9:32 ‡ 120:13 ‡ 130:63 ‡ 30:10)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 13 (13).

Número de veces ejecutado: 952. De ellas, 787 bien y 165 mal. Dificultad: 21%.

Tiempo medio de resolución: 15 segundos (12 en aciertos y 31 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 92% (152 sobre 165).

Comentarios:

El redondeo de cantidades, tanto por defecto como por exceso, suele dar problemas en general, y por tanto en los alumnos también.

Cuando además introducimos el concepto decena (aunque podría ser otro cualquiera del Sistema Decimal) se crea una dificultad añadida como vemos en este caso, con una amplia variedad de respuestas que deja al descubierto la confusión de conceptos tales como centena, decena, etc.

Por otra parte, existen otros errores significativos como irse al número más cercano múltiplo de 10 (por lo de decena). Así la respuesta 130, 63 veces, puede mostrarnos el mecanismo erróneo utilizado por no pocos alumnos.

2765. ¿Qué número entero no puede figurar en el denominador de una fracción?**(0 – 1:9)****Observaciones:**

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 0 (0).

Número de veces ejecutado: 643. De ellas, 602 bien y 41 mal. Dificultad: 7%.

Tiempo medio de resolución: 10 segundos (10 en aciertos y 16 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 22% (9 sobre 42).

Comentarios:

Cuando el denominador de una fracción es 0 el resultado es infinito.

Este concepto, por su abstracción, no es fácil de entender. Ahora bien, si vamos haciendo divisiones de una cantidad constante por divisores cada vez más pequeños o grandes, vamos obteniendo resultados cada vez más grandes o pequeños.

De esta manera van pudiendo los alumnos irse acercando al concepto de infinito y también al 0, aunque en este caso la abstracción es menor.

La dificultad del problema es más bien baja para los alumnos de 5 de Primaria y los errores sistemáticos, el 1, que supone un 21% de los errores tampoco es muy relevante.

Tal vez merezca la pena señalar que un posible pensamiento para decantarse erróneamente por el 1 se deba a que *al dividir por 1 el resultado es el dividendo (numerador), y dicho resultado, que es un número natural, deja de ser fracción*. Hubiera faltado saber para evitar dicho posible razonamiento que todo Natural es una fracción con denominador 1.

3413. ¿Cuál es el divisor de una división si el dividendo es 37, el cociente 2 y el resto 11?**(13 – 85:16)****Observaciones:**

Curso: 6º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 13 (37-11)/2.

Número de veces ejecutado: 813. De ellas, 743 bien y 70 mal. Dificultad: 7%.

Tiempo medio de resolución: 14 segundos (12 en aciertos y 34 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 23% (16 sobre 70).

Comentarios:

Este problema de finales de Primaria plantea la completa comprensión de la división en la que entran en juego todos los conceptos intervinientes relacionados según la fórmula $\text{Dividendo} = \text{Divisor} \times \text{Cociente} + \text{Resto}$.

Además, en este caso concreto, de una u otra forma se ha de llegar a aislar de dicha fórmula (de forma reglada o intuitiva) el Divisor, lo que le añade una cierta dificultad más.

No se trata de un problema difícil para la edad y los errores sistemáticos se acercan a una cuarta parte del total de los cometidos.

4.3.3. Cálculo (Eob.284)

En este apartado se incluirán todos aquellos errores que reflejen fallos o equivocaciones en lo referente al cálculo operatorio.

La primera agrupación que surge es la relativa a las cuatro operaciones básicas y sus errores pueden ser debidos a fallos normales en el uso de las mismas y también a falta de conocimiento en el uso de las reglas que llevan implícitas las mismas (llevarse una, bajar la cifra siguiente...).

Como ya hemos comentado anteriormente, la diferenciación entre estas categorías no se ha conseguido de una manera categórica y definitiva. Hemos utilizado unos criterios subjetivos que pensamos que pueden arrojar luz sobre los contenidos que estamos analizando, pero no excluimos que puedan existir otros, seguramente igual de válidos que los nuestros para otros objetivos distintos de los que nosotros nos hemos planteado.

Quedan fuera de esta primera clasificación otros tipos de errores como son, por ejemplo, el uso erróneo de la propiedad conmutativa en la resta y el cociente, que lleva a usar indistintamente minuendo/sustraendo, en la primera, o dividendo/divisor, en el del segundo.

También los derivados del desconocimiento del valor relativo de las cifras o de la colocación de las mismas cuando intentamos realizar operaciones sin calculadora. Esta dificultad, que puede abarcar desde el mal uso hasta el perfecto desconocimiento del número decimal está muy presente en una parte no pequeña de alumnos tras varios años de escolaridad obligatoria, secundaria incluida. Y los que podríamos describir como errores de concepto (usar una operación en vez de otra) en los que puede observarse frecuentemente cálculos perfectamente realizados.

Finalmente, tenemos los errores derivados de la falta de acotación del número entero y que suelen estar muy pegados al desconocimiento de cómo funciona el sistema decimal, de base 10. Todos ellos tienen un común denominador: la poca familiaridad con el cálculo aritmético, a la que tan poderosamente han contribuido la expansión de cachivaches tecnológico-calculatorios y, sobre todo, nuestros planes de enseñanza más preocupados en divertir a los infantes que en facilitarles estrategias estables de conocimiento, razonamiento, cálculo y también geometría, memoria y comprensión lectora, por ejemplo.

Debe ser el costo de la modernidad que algún día la nueva Pedagogía, fuera de sus púlpitos, nos tendrá que explicar a los inexpertos profesores de a pie, sustituyendo sus huecos y dogmáticos discursos apostolares por hipótesis de trabajo, contrastes y evidencias científicas, si es que son capaces.

4.3.3.1. Suma (32)

Se incluyen en este grupo los errores básicos de cálculo que aparecen en la suma. Se trata de errores de conteo, de olvido de añadir con las que te llevas de la columna anterior, de no incluir en la suma algún dato del problema e incluso, aunque raramente, colocaciones incorrectas en las cifras de unidades, decenas...etc previas a sumar.

Ejemplos: Eob1 605, 817, 2310

605. Por la mañana gané 27 canicas, en el recreo otras 14 y por la tarde 12. ¿Cuántas gané en total?

(53 – 43:7 ≠ 52:7)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 53 (27+14+12).

Número de veces ejecutado: 980. De ellas, 885 bien y 95 mal. Dificultad: 11%.

Tiempo medio de resolución: 20 segundos (17 en aciertos y 44 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 15% (14 sobre 95).

Comentarios:

Se presentan en este problema dos fallos simples y típicos de la operación suma y que son muy frecuentes en los niveles más bajos de Primaria.

La respuesta 43 en vez de 53 con el fallo de llevarse 1 a la cifra siguiente, la de las decenas.

En la respuesta 52 se trata de un fallo de conteo. Recordamos que en estos primeros cursos no es nada raro ver utilizar los dedos para sumar, costumbre que tarda en desaparecer... si es que llega a hacerlo totalmente.

817. Paco pesa 23 kilos y Carlos 18. ¿Cuánto pesan entre los dos?

(41 – 31:12)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 41 (23 + 18).

Número de veces ejecutado: 643. De ellas, 970 bien y 77 mal. Dificultad: 8%.

Tiempo medio de resolución: 17 segundos (16 en aciertos y 33 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 16% (12 sobre 77).

Comentarios:

Como en el caso anterior, podemos ver otro ejemplo al olvidarse la que se arrastra de la cifra anterior.

2310. Eché en un recipiente 0.02 litros de agua y 1.7 litros más. ¿Cuántos litros habrá? (1.72 – 1:6 ≠ 1.9:12)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 1.72 (0.02 + 1.7).

Número de veces ejecutado: 88. De ellas, 806 bien y 71 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 13 segundos (12 en aciertos y 26 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 15% (10 sobre 71).

Comentarios:

Se trata de realizar una suma simple con una dificultad añadida, que es colocar las cifras de forma ordenada, es decir, haciendo coincidir las unidades, décimas, etc.

En la primera respuesta, 1, se ignora la parte decimal de la respuesta, presumiblemente por el desconocimiento que conlleva la operatoria decimal.

En la segunda, 1.9, todo parece indicar que el error consiste en no haber colocado correctamente las cifras unas debajo de otras a la hora de sumar, añadiendo a las 2 centésimas del primer dato las 7 décimas del segundo, obteniendo como resultado de tal operación 9 décimas.

(Este tipo de error decimal será tratado con más detalle en el punto 4.3.8.4. Sistema numérico decimal.)

4.3.3.2. Resta (70)

En el caso de la resta persisten, como en la suma, el olvido de las que te llevas pero va ganando peso en los errores el aumento de las colocaciones incorrectas (restar de las unidades la cifra que corresponde a las decenas...) e incluso confusiones muy serias entre *minuyendo* y *sustraendo*: confundir el *qué* quitar (*sustraendo*) con el *de dónde* quitar (*minuyendo*), que serán tratados con mayor detalle posteriormente, en el apartado de **Conmutatividad errónea**.

Ejemplos: Eob2 233, 792

233. Ana compró 24 peras en la tienda y se comió 15. ¿Cuántas tiene ahora?

(9 – 19:7)

Observaciones:

Curso: 1º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 9 (24-15).

Número de veces ejecutado: 911. De ellas, 832 bien y 79 mal. Dificultad: 11%.

Tiempo medio de resolución: 13 segundos (11 en aciertos y 27 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 9% (7 sobre 79).

Comentarios:

La respuesta muestra un error básico consistente en olvidarse que llevar 1 y tenerlo en cuenta a la hora de operar la cifra siguiente. Es un error muy común en los primeros pasos de la operatoria básica, no solo la suma y la resta, como veremos más adelante, y no de forma excepcional, en cursos posteriores.

792. Empecé a jugar con 29 canicas y acabé con 43. ¿Cuántas gané?

(14 – 13:9 ‡ 72:15)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 14 (43-29).

Número de veces ejecutado: 928. De ellas, 844 bien y 84 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 18 segundos (16 en aciertos y 40 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 29% (24 sobre 84).

Comentarios:

Tenemos dos respuestas de errores sistemáticos en este problema de dificultad media-baja.

En la primera, 13, pensamos que se da un fallo de conteo (de 9 a 13, 3 en vez de 4) con mantenimiento de las que se llevan.

En la segunda, 72, tenemos un fallo de comprensión del texto, se han sumado los datos en vez de restar del segundo al primero, pero el cálculo de la suma ha sido correcto.

Es un fallo propio de alumnos despistados, primarios, activos y poco reflexivos.

4.3.3.3. Producto (40)

Respecto al **Producto**, el mayor número de errores se basa en los derivados del uso de las tablas de multiplicar. A esta falta de memorización de las tablas hay que añadirle, cuando ambos factores pasan de 10, los fallos en la colocación escalonada de los resultados parciales que después se han de ser sumados para obtener el resultado.

Como en el resto de los errores de cálculo, tiene bastante que ver la cercanía y la gran cantidad de artefactos (calculadores, ordenadores, relojes, teléfonos...) que nos procuran la felicidad sin esfuerzo y hacen las cuentas por nosotros... incluso antes de que los alumnos tengan un mínimo de asimilación de las destrezas necesarias.

La falta de familiaridad calculatoria facilita importantes errores en la interpretación de los resultados que se obtienen a través del cálculo, pues los alumnos no hacen ni la más mínima estimación de una banda u horquilla donde puedan estos caer y la ausencia de esta previsión los deja desprotegidos ante confusiones de tecleo sobre el signo de la calculadora y aceptar como buena, por ejemplo, 175 metros como la estatura de un hombre. Ejemplos Eob3: 827, 3681, 3703

827. ¿Cuánto es 20×500 ?

(10000 – 10:35 † 1000:35 † 520:6)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 10000 (20×500).

Número de veces ejecutado: 1056. De ellas, 930 bien y 126 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 20 segundos (16 en aciertos y 49 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 60% (76 sobre 1126).

Comentarios:

Este problema nos muestra tres errores con una sistematicidad no menor.

En el último, 520, se confunde el signo $\times$ (por) con la suma, y la base del fallo puede estar en la falta de asociación del $\times$ con el producto. Es decir, hay alumnos que pueden asociar $\times$ y $+$ por la inercia de los trazos en aspa ($\times$) propia del trabajo en papel.

Los otros dos fallos, 10 y 1000, son dos despistes muy comunes. El primero olvidarse de los miles (multiplicar 2×5) y el segundo olvidarse de un 0, o no contar el de 10.

3681. Si una caja de 100 sobres acolchados vale 8.5 euros, ¿cuántos céntimos de euro valdrá un sobre?
(8.5 – 0.085:7 ≠ 85:7)

Observaciones:

Curso: 1ºESO.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 8.5 (8.5 –céntimos o /100).

Número de veces ejecutado: 632. De ellas, 588 bien y 54 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 10 segundos (8 en aciertos y 26 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 26% (14 sobre 54).

Comentarios:

La capacidad de distorsión que pueden generar dos conceptos en cierta medida contrapuestos o inversos, como 100 y céntimo, es alta incluso en alumnos de Secundaria, como es este caso. Y eso sin contar con una palabra algo rara como es acolchados.

Esos problemas de comprensión del texto se traducen en operar los datos del problema, obteniendo 0.085 (8.5 / 100) como primera respuesta y 85 que debe de ser el resultado de operar 8.5, 100 y algo relacionado con céntimos, pero que no lo es (segunda respuesta).

3703. En un plano a escala 1:100, ¿qué distancia real en m. representan 3 cm.? (3 – 300:14)

Observaciones:

Curso: 2ºESO.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 3 (3 × 100/100).

Número de veces ejecutado: 797. De ellas, 734 bien y 63 mal. Dificultad: 8%.

Tiempo medio de resolución: 11 segundos (8 en aciertos y 39 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 22% (14 sobre 63).

Comentarios:

El texto del problema, que tiene bastantes similitudes con el anterior (manejar adecuadamente conceptos contrapuestos), introduce una dificultad añadida que es la aplicación del concepto escala en alumnos de 2º de ESO, 13 o 14 años.

Nuevamente, la incomprensión del problema (frecuentemente causada más por no leer bien que por comprender mal (si es que ambas no significan lo mismo) y/o por suponer la pregunta en vez de leerla y analizarla), lleva a alumnos a operar ciegamente los datos sin llegar a ver que la respuesta la da directamente el problema

4.3.3.4. Cociente (23)

La división es la operación que más dificultad entraña y que más errores genera porque implica a las otras tres (añadir las que te llevas, restar y las tablas) y además introduce nuevas dificultades relacionadas con la colocación de los resultados intermedios.

A parte de eso, y al igual que la resta, no acepta la reversibilidad o conmutabilidad operatoria de sus elementos, y las equivocaciones entre dividendo y divisor son una fuente de fallos persistente y significativa.

Ejemplos: Eob4 1227 2720

2720. ¿Cuánto da 5373 / 0.1?

(53730 – 53.73:10)

Observaciones:

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 53730 (5373/0.1).

Número de veces ejecutado: 920. De ellas, 833 bien y 87 mal. Dificultad: 9%. menor que 1

Tiempo medio de resolución: 15 segundos (12 en aciertos y 45 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 11% (10 sobre 87).

Comentarios:

En general, multiplicar o dividir una cantidad por un positivo menor de 1 genera muchos errores de concepto y también mecánicos. Y esto es así porque al multiplicar o dividir por un número entre 0 y 1 obtenemos como resultado un número menor o mayor que el dado. Es decir, obtenemos un resultado que arrastra un comportamiento anómalo y contraintuitivo dentro de los Naturales.

En este caso, y para obtener la respuesta dada se ha tenido que transformar el divisor en 100. No sabemos la razón que ha llevado a sustituir 0.1 por 100 en vez por 10, pero así ha sido.

1227. Con 981 claves, ¿cuántos ramos de 9 claves puedo formar?

(109 – 19:30)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 109 (981/9).

Número de veces ejecutado: 1135. De ellas, 1008 bien y 127 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 30 segundos (26 en aciertos y 63 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 24% (30 sobre 127).

Comentarios:

La mecánica de la división es, o tal vez era, uno de los aprendizajes más laboriosos del periodo de aprendizaje básico. E introduzco el pasado porque en la actualidad dicho aprendizaje se va tratando como superfluo por los mandarines de la cosa pedagógica, saltimbanquis de la moda y *mandaos* escondidos tras pingües negocios de editorial de la Enseñanza Obligatoria que de lo único que entiende es de vender y vender libros de un solo uso.

Liberar a los niños de tareas tediosas de aprendizaje tal vez no sea tan buena idea como parece.

Lo sería si el tiempo ahorrado fuera dedicado a otras tareas de carácter formativo o creativo, pero no para ver la TV, o jugar a la Play.

En este problema la respuesta es 109 (981 / 9). Vemos que no pocos alumnos han transformado esta en 19. Lo que ha ocurrido es que el desconocimiento basado en la falta de práctica no ha sabido que, cuando se baja la siguiente cifra del dividendo (porque lo que se va a repartir es menor que el divisor), se ha de añadir un 0 en el cociente. 0 al cociente y bajo la cifra siguiente, decíamos en los años sesenta, cuando no teníamos TV y no podíamos divertirnos con los ordinarios modos de vida de Homer Simpson, que en ausencia de comprensión de la sátira, se pueden convertir en modelos.

4.3.3.5. Conmutatividad errónea (25)

Ya dejamos apuntado en puntos previos la dificultad añadida de la no conmutatividad de la resta y el cociente, que no aparecen en la suma y el producto puesto que los sumandos (*caso de la suma*) o los factores (*en el producto*) son usados indistintamente en lo que se refiere a su ubicación (*arriba/abajo*) o *izquierda/derecha*.

La confusión entre minuendo y sustraendo o entre dividendo y divisor se va manteniendo a lo largo de la escolaridad entre el alumnado con menos motivación y más dificultades de aprendizaje y no queda resuelto definitivamente tras todo el periodo de escolaridad obligatoria.

1439. Divido en partes iguales 4 quesos para 8 niños. ¿Cuánto tocará a cada uno?

(0.5 – 1:44 ‡ 1.5:9 ‡ 2:77 ‡ 32:7 ‡ 4:13)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 0.5 (4/8).

Número de veces ejecutado: 1081. De ellas, 911 bien y 170 mal. Dificultad: 16%.

Tiempo medio de resolución: 22 segundos (18 en aciertos y 48 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 82% (140 sobre 170).

Comentarios:

En general, en el Ciclo Medio de Primaria se comienza la operatoria de la división, que aunque de difícil mecánica, se va adquiriendo y asentando paulatinamente.

Otra cosa distinta de la cuestión mecánica es cuando el alumno ha de dar respuesta a una pregunta aplicando adecuadamente, es decir, selectivamente, sus conocimientos operatorios y numéricos al texto y significado concreto.

Esto es un problema mayor, normalmente. Y dentro de esta dificultad, como en este caso, está el hecho de tener que escoger, de entre los datos, cuál de ellos se asocia a lo que se reparte y cuál al número entre los que se reparte, cuál es el dividendo y cuál el divisor, habida cuenta de que su aparición en el texto no siempre viene ordenada.

Además tenemos un dividendo menor que un divisor, lo que nos acarrea algunas dificultades añadidas (decimales, etc.).

Solución, asumir dividir los datos, pero de forma que no me plantee más problemas que la división que sé realizar, dividir $8 / 4 = 2$ (respuesta mayoritaria) en vez de $4 / 8$.

2154. Si reparto 6 pasteles entre 24 niños, ¿qué parte del pastel le tocará a cada uno? (0.25 – 1:7 ≠ 4:16)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 0.25 (6/24).

Número de veces ejecutado: 870. De ellas, 790 bien y 80 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 13 segundos (12 en aciertos y 27 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 29% (23 sobre 80).

Comentarios:

De la respuesta 1 del problema, poco podemos decir. Tal vez, que se aproxime al natural por exceso (de 0.25 a 1).

En la segunda respuesta, ($4 = 24 / 6$), vemos una inversión en los términos dividendo y divisor de la operación. Dicho cambio evita la dificultad mecánica de enfrentarse a un dividendo más pequeño que el divisor, es decir, a un resultado decimal menor que 1 y a un no siempre fácil de aplicar *0 al cociente y bajo la cifra siguiente*.

3508. 10 es igual a 100 multiplicado por ¿cuánto? (0.1 – 10:14)

Observaciones:

Curso: 6º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 0.1 (10/100).

Número de veces ejecutado: 660. De ellas, 600 bien y 60 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 9 segundos (8 en aciertos y 15 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 23% (14 sobre 60).

Comentarios:

Cuando utilizamos conceptos aparentemente contradictorios (en este caso multiplicar una cantidad por algo y hacerla menor y no mayor, es contraintuitivo) podemos ver como los alumnos pueden evitar el obstáculo de una manera sencilla. Igual que en el caso anterior el cambio de los términos dividendo y divisor nos allana el terreno y nos evita tener que dividir una cantidad menor por otra mayor, es decir, salir del conjunto de los Naturales donde las cosas son menos complicadas que en el conjunto de los Racionales.

4.3.3.6. Descolocación de cifras (65)

Afecta a todas las operaciones aunque con intensidad creciente y paralela a la dificultad de las mismas.

Es un tipo de error relativamente ocultado por el uso de dispositivos calculatorios que solo muestra su verdadera cara, al igual que el resto de errores de este apartado, cuando el alumno está forzado a realizar las operaciones por su cuenta, con lápiz y papel, sin asistencia electrónica.

Es ahí cuando podemos ver en cascada, los errores de llevarse de la columna anterior, el desconocimiento de las tablas, las colocaciones arbitrarias de cifras, las conmutatividades falsas, etc.

Ejemplos: Eob6 367 1084 2962

367. Tenía 53 cosas y dí 26 a mi hermano. ¿Con cuántas me quedé?

(27 – 33:7)

Observaciones:

Curso: 1º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 27 (53-26).

Número de veces ejecutado: 999. De ellas, 883 bien y 116 mal. Dificultad: 13%.

Tiempo medio de resolución: 19 segundos (16 en aciertos y 39 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 6% (7 sobre 116).

Comentarios:

Mostramos este problema, cuya estructura es casi idéntica al anterior, porque la respuesta aporta un interés adicional. La respuesta es 33 en vez de 27. ¿Cómo se ha elaborado esta respuesta? o ¿de dónde sale 33?

Existen casos no muy frecuentes, pero tampoco raros, en los que se resuelve la resta de una manera incorrecta aunque creativa. Comenzando por la derecha, es decir el primer número hallado no se obtiene restando al minuendo (arriba) el sustraendo (abajo) como es normal, sino al revés para continuar la resta, ya sí, como procede, es decir, quitando al minuendo el sustraendo. En este caso, de 3 a 6, 3 y de 2 a 5, 3. Total, 33.

Es un error propio de alumnos muy inmaduros, y/o poco centrados en la tarea, y/o muy poco motivados.

1084. Un libro cuesta 18.37 euros y un cuaderno 2.6 euros. ¿Cuánto cuesta todo junto?

(20.97 – 1863:6 ‡ 20:7 ‡ 20.43:36 ‡ 2097:11)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 20.97 (18.37+2.6).

Número de veces ejecutado: 1055. De ellas, 923 bien y 132 mal. Dificultad: 7%.

Tiempo medio de resolución: 26 segundos (20 en aciertos y 70 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 45% (60 sobre 132).

Comentarios:

Cuando se introduce la dificultad del uso de los decimales las respuestas muestran una amplia casuística que abarca casi todas las combinaciones de error posible: prescindir de la coma y sumar décimas con centésimas (0.6 y 0.07) y unidades con décimas (2 con 0.3) (Respuesta 1863), sumando solo las partes no afectadas por la coma, es decir sumar la parte entera, (Respuesta 20), colocar mal los decimales (sumar 2.06 en vez de 2.6), sumar ignorando la coma decimal, como si no existiera (Respuesta 2097).

En los primeros cursos, Ciclo Inicial de Primaria todos estos errores se dan frecuentemente pueden considerarse normales hasta cierto punto.

2962. Pago por un sobre 0.57 € y por un sello 0.3 €. ¿Cuánto me cuestan las dos cosas?

(0.87 – 0.6:10)

Observaciones:

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 0.87 (0.57+0.3).

Número de veces ejecutado: 88. De ellas, 806 bien y 71 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 13 segundos (12 en aciertos y 26 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 15% (10 sobre 71).

Comentarios:

El presente problema plantea, como el anterior, la suma de cantidades con decimales, si bien en este caso se comentan dos palabras que pueden descolocar a los alumnos, habida cuenta de su rareza en nuestra vidas actuales: el sobre y el sello.

Los alumnos son tres años mayores y los errores no han desaparecido, aunque es cierto que se ha dividido por 3 la sistematicidad de los mismos.

Se siguen colocando mal las cifras para la suma, lo que les lleva a juntar 3 décimas con 7 centésimas que dan como resultado 1 décima que me llevo a la cifra siguiente.

4.3.3.7. Decimal/entero (29)

Más allá de los fallos derivados de una notación no estandarizada en el uso de los puntos y las comas (la influencia de calculadoras y ordenadores sobre el punto como decimal que reemplaza la función antigua de separador de miles y que ya hemos comentado en los puntos 2.3.3 y 2.1), existen equivocaciones ostentosas en la obtención mecánica (la división hecha con lápiz y papel) de los resultados. No es fácil controlar la mecánica de la división: dividiendo, resto, tablas de multiplicar, tanteo del divisor, bajar la cifra siguiente, etc. Son escalones muy tramposos y empinados para quién los ha ejercitado poco y no pocas veces producen bloqueo por desconocimiento sobre lo que se ha de hacer cuando se acaban todas las cifras del dividendo (numerador) y donde el alumno decide finalizar la tarea cuando se acaban los dígitos a bajar para seguir repartiendo.

A veces el uso de unas habilidades nos acerca a la profundidad del concepto, y consecuentemente, el no uso, las incapacita o las atrofia.

Nuestra idea es que es bueno conocer la mecánica de las operaciones (la división es una gran fuente de errores *entero/decimal* dada su mayor complejidad entre las básicas) aunque existan calculadoras que obtengan los resultados con más agilidad y menos errores que nosotros.

También pensamos que es bueno poseer, internamente, unos conocimientos y destrezas que están disponibles y utilizables en Internet, lo mismo que aprender a tocar la guitarra sabiendo que ya han existido un Narciso Yepes o un Paco de Lucía.

Es posible que sean cosas de jubilado, pero no vamos a cambiar ahora nuestras ideas por el teleguiado de los hamelines de moda o *influencers* de medio pelo, menos interesados en la realidad que en su minuto de gloria personal.

Ejemplos: Eob7 1204 1357 2030

1204. Si reparto 13 naranjas entre 2 niños, ¿cuántas naranjas tocarán a cada uno?

(6.5 – 6:58)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 6.5 (13/2).

Número de veces ejecutado: 1001. De ellas, 900 bien y 101 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 17 segundos (14 en aciertos y 39 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 58% (58 sobre 101).

Comentarios:

Podemos ver en estos resultados como algunos de los alumnos de 8 o 9 años de 3º de Primaria (un 10% indican nuestros cálculos) resuelven un primer escalón de dificultad en la división con decimales: interrumpiendo la operación cuando se acaban los dígitos del numerador, lo cual se traduce en un resultado aproximativo, por defecto, entero, del verdadero resultado.

1357. Nueve niños tienen media galleta cada uno. ¿Cuántas galletas tienen entre todos?

(4.5 – 18:37 † 4:38 † 5:10 † 9:18)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 4.5 (9×0.5).

Número de veces ejecutado: 1164. De ellas, 994 bien y 170 mal. Dificultad: 15%.

Tiempo medio de resolución: 37 segundos (33 en aciertos y 63 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 60% (103 sobre 170).

Comentarios:

Las respuesta que tenemos en este caso no son tan monolíticas como las del anterior donde todos los errores sistemáticos se dieron en una única dirección. Aquí hay más diversidad.

Es cierto que no se trabaja con los mismos conceptos dado que aquí se introduce el problemático concepto *medio* cuya falta de comprensión genera dos alternativas de error que en el fondo son la misma: operar 0.5 por 2 (confusión error / doble) y/o confundir el producto por el cociente a la hora de operar. Este es el caso de la primera respuesta, $1 = 9 \times 2$.

La segunda respuesta, $4 = 9 \times \frac{1}{2}$ o $4 = 9 \times 0.5$ o $4 = 9 / 2$, se elige la operación correcta pero se prescinde de los decimales (aproximación por defecto al natural o entero).

La tercera, $5 = 9 \times \frac{1}{2}$ o $5 = 9 \times 0.5$ o $5 = 9 / 2$, donde se aproxima por exceso al entero.

La cuarta, 9, donde se recurre a dar como resultado el primer dato de problema (se puede complementar con lo expuesto en el punto 4.3.1.4). Presión del primer o último dato.

2030. Con 13 medias hojas de papel ¿cuántas hojas enteras podemos hacer? (6 – 13:6 † 26:35 † 6.5:66 † 7:7)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 6 ($13/2 = 05$, al ser por defecto).

Número de veces ejecutado: 1083. De ellas, 938 bien y 145 mal. Dificultad: 13%.

Tiempo medio de resolución: 20 segundos (18 en aciertos y 36 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 79% (114 sobre 145).

Comentarios:

En este problema se explicita el concepto de *entero* adelantando las dificultades con el uso de este concepto. La idea era facilitar la respuesta y minimizar el error por la eliminación de la parte decimal del producto por 0.5 o del cociente por 2.

La respuesta 13 se corresponde con la presencia del primer dato y es propia de los alumnos más inmaduros y/o pasotas.

En la segunda, 26, se elige mal la operación (producto / cociente) o el divisor ($0.5 / 2$), es decir, o se multiplica por 2 o se divide por 0.5.

En la tercera, 6.5, se elige la operación y los operandos correctos pero no es eliminar la parte decimal como solicita el problema.

Y la cuarta respuesta, 7, es la aproximación por exceso (error) del resultado correcto del cálculo.

4.3.4. Concepto en la operación (Fou.405)

Recogeremos en este punto los errores producidos por el uso incorrecto de las cuatro operaciones básicas, suma, resta, producto y cociente. Dejamos fuera, pues, otras equivocaciones más sofisticadas, digamos, como las que se pueden presentar en las raíces y potencias. La muestra que tenemos de estas dos últimas es mucho menor que la de las básicas, pero queremos resaltar que su ausencia de visibilidad no refleja que no existan problemas sino que tales no han sido totalmente cubiertas por nuestro foco y quedan ocultos por otros mayores.

En los problemas de este apartado existen bastantes textos con palabras cuyos significados carecen de una precisión y delimitación exacta que permita saltar del lenguaje cotidiano a su versión matemática. Añadir, agregar, robar, quedar, repartir, quitar, sacar, repartir, dar, obtener, y otros muchos más, han de ser traducidos debida y ordenadamente por sumar, restar, multiplicar y dividir, y eso no es siempre fácil si no se utiliza el lenguaje con una cierta rigurosidad.

Por otra parte, a veces los vocablos pueden cambiar de significado, e incluso adquirir el opuesto, en función del contexto o la gramática que los vaya acompañando, como es el caso de los que en este trabajo denominamos Confusores, y que veremos más adelante.

Se trata de un grupo de errores que incluyen muchos problemas y también bastantes casuísticas diferentes y subgrupos. Frecuentemente, como ya hemos dicho, los errores no suelen mostrarse de forma pura, limpia y cristalina sino dentro de una mezcolanza bastante poco diferenciada. Cuando así ocurra será nuestro criterio el único responsable de la asignación del error a una categoría y no a ninguna otra. Asumimos esa, a veces, complicada decisión porque lo contrario generaría un trabajo tan enorme que no podríamos abordar. A veces menos es más y moverse entre más información que la que somos capaces de manejar es una idea que deseamos evitar.

Esperamos que, en este caso, la extensión no esté reñida con el interés de las observaciones que se presenten, con clara conciencia de que estas podrían ser más profundas y aguilatadas, pero también inexistentes.

4.3.4.1. Sumar en vez de restar (42)

La confusión de sumar cuando la operación que se debe realizar es restar, es seguramente uno de los errores que más pronto aparece en los alumnos que se enfrentan a la resolución de un problema en el cual la literalidad del texto tiene un papel determinante.

La suma es la operación que antes se enseña y que también antes se aprende. Es más fácil tanto desde el punto de vista del método como del concepto, pero aún así, no siempre es sencillo asociar una amplia cantidad

de palabras, conceptos, a una operación determinada teniendo en cuenta que el contexto, y no solo el texto, puede entrar en juego.

Los cursos con más abundancia de este tipo de error son los más bajos de la Primaria, segundo y sobre todo primero, aunque con distintas formas (más maduras y complejas) puede presentarse en cursos más avanzados. Ejemplos: 307, 1281, 4436.

307. Marcelo tiene 9 años y Ernesto 11. ¿Cuántos años se llevan? (2 – 1:7 ‡ 20:11 ‡ 3:6)

Observaciones:

Curso: 1º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 2 (11-9).

Número de veces ejecutado: 1015. De ellas, 921 bien y 94 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 15 segundos (14 en aciertos y 26 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 26% (24 sobre 94).

Comentarios:

La respuesta 3, puede ser debida a errores en el conteo para la obtención de la respuesta, que es 2. Se trata de fallos en el cálculo mecánico, pero no en la elección de la operación. Es decir, se sabe traducir *llevar* a restar.

La 2ª respuesta, 20, la más frecuente, refleja que la operación realizada está mal escogida (sumar en vez de restar) y bien realizada, o bien, *llevar* no se asocia con restar sino con sumar. La ambivalencia de *se llevan* provoca la inversión minuendo y el sustraendo.

1281. Compré 35 cromos pero ya tenía 18. ¿Cuántos me salieron nuevos? (17 – 18:16 ‡ 35:116 ‡ 53:77)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 17 (35-18).

Número de veces ejecutado: 1148. De ellas, 937 bien y 211 mal. Dificultad: 18%.

Tiempo medio de resolución: 24 segundos (20 en aciertos y 45 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 99% (209 sobre 211).

Comentarios:

Se trata de un problema que muestra un nivel de dificultad bastante elevado, lo falla casi 1 de cada 5 alumnos (18%). Se ha de elegir la operación desde un texto bastante neutro, sin pistas donde nada apunta hacia una operación concreta

Las respuestas 1ª y 2ª, 18 y 35 respectivamente, se corresponden con la elección del último y primer dato, y la predilección de elegir el primero de ellos como respuesta (35) es claramente ganadora.

La 3ª respuesta, 53, se obtiene a partir de la suma de los datos en vez de ser restados como exige la respuesta correcta.

4436. Un termómetro registra las siguientes lecturas: 12°C / 12°C / 3°C / 7°C y 19°C .
¿Cuántos grados ha variado del 2° al 4° registro?

(-5 – 5:6)

Observaciones:

Curso: 2° ESO.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: -5 (7-12).

Número de veces ejecutado: 651. De ellas, 603 bien y 48 mal. Dificultad: 8%.

Tiempo medio de resolución: 9 segundos (8 en aciertos y 19 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 12% (6 sobre 48).

Comentarios:

El presente texto pide la variación que existe entre dos datos termométricos, el 2° y el 4° de los presentados. El paso del 2° al 4° se lleva a cabo mediante la operación que nos solicita en forma de respuesta. No se trata de un problema difícil para 2° de ESO, 13 – 14 años, pero no todos los alumnos son capaces de responder adecuadamente a la colocación del minuendo y el sustraendo en la resta que se realiza. Para ellos, restar $12 - 7$ es mucho menos comprometedor que $7 - 12$, que causa tener que abandonar el dominio de los Naturales y echar mano de la primera ampliación de números: los Enteros.

4.3.4.2. Restar en vez de sumar (43)

Realizar la operación resta cuando se ha de realizar una suma es una sustitución también bastante frecuente. Al igual que en caso anterior el error se produce en una incorrecta asignación de la operación que no se corresponde al concepto y el contexto a los que el problema se refiere.

Aunque van evolucionando casi en paralelo con los errores del apartado anterior, desde el punto de vista evolutivo alcanzan más frecuencia algo después que los primeros. Ejemplos: Fou2 648 1546 2640

648. Perdí 13 € en la calle pero me quedan otros 22. ¿Cuántos euros llevaba al principio?

(35 – 13:6 ≠ 9:8)

Observaciones:

Curso: 2° Primaria.

Longitud del texto: Larga. Respuesta correcta: 35 (13+22).

Número de veces ejecutado: 1007. De ellas, 932 bien y 75 mal. Dificultad: 74%.

Tiempo medio de resolución: 17 segundos (16 en aciertos y 32 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 19% (14 sobre 75).

Comentarios:

Destacamos en este problema la gran dificultad que presenta. Ha sido fallado casi 3 de cada 4 veces que ha sido hecho. Muchos errores, incluso para alumnos pequeños (2° de Primaria, 7 u 8 años). ¿Cómo explicar esa dificultad?

Recordemos lo que comentamos en el punto 4.3.1.3. **Confusores.**

Hablamos de vocablos que dentro de un contexto adquieren un valor distinto, incluso opuesto, al que tienen aisladamente.

Algo de eso pasa con la palabra Perdí de nuestro texto. Lejos de significar *quitar*, *sustraer*, *restar*, *etc*, dentro del contexto del problema la palabra adquiere el significado de juntar, añadir, etc, y si no existe una auténtica comprensión del texto, *perdí* adquiere su significado original, descontextualizado, lo que se transforma en error.

1546. Compro 541 euros de lotería y aún me quedan 134. ¿Cuántos euros tenía antes de comprarla?

(675 – 407:13 ≠ 541:30)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 675 (541+134).

Número de veces ejecutado: 974. De ellas, 888 bien y 96 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 19 segundos (18 en aciertos y 31 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 50% (43 sobre 86).

Comentarios:

En línea con los comentarios anteriores, el presente problema también exige una certera comprensión sin la cual ese *quedan* se convierte en sustraendo de lo que compro, en vez de un sumando a dicha cantidad. Esta es la primera respuesta, $407 = 541 - 134$.

La 2ª respuesta, 541, mayoritaria, es recurrir al primer dato mostrado en el problema, que suele utilizarse cuando no se ve claro lo que se ha de hacer, es decir, una especie de probar suerte y ponerse en manos de la fortuna o de la casualidad.

2640. ¿Cuánto vale la X en la igualdad $X - 7 = 25$?

(32 – 18:11)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 32 (25 + 7).

Número de veces ejecutado: 794. De ellas, 731 bien y 63 mal. Dificultad: 8%.

Tiempo medio de resolución: 16 segundos (14 en aciertos y 35 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 17% (11 sobre 63).

Comentarios:

Plantear una ecuación simple en alumnos de 3º Primaria, 8 o 9 años, sin explicaciones previas sobre las leyes de las igualdades y los cambios de signo al cambiar los elementos de miembro (del 1º al 2º o viceversa) y obtener una dificultad inferior al 10% ha sido sorprendente, aunque solo un poco. El hecho de situar el problema en ese nivel, y no varios cursos después, se basó en que intuíamos algo parecido a lo que hemos obtenido y queríamos tantear la madurez potencial de los alumnos más pequeños.

Los alumnos que han acertado (más del 90%) han llegado a la respuesta a través de su maduración lógica, que no operatoria o mecánica, y ello nos lo tomamos como una información positiva muy relevante.

4.3.4.3. Multiplicar en vez de dividir (55)

Se trata de errores más evolucionados y que necesitan de niveles de maduración previos a los puntos anteriores. Además de esto, no deja de ser cierto que no se presentan problemas cuya resolución requiera productos o cocientes si los alumnos no saben sumar, restar o desconocen las tablas.

Es decir, genéricamente se parte de una secuencia óptima para la enseñanza y aprendizaje de las cuatro reglas básicas: los primeros cursos de Primaria suma y resta y posteriormente producto y cociente. Esa misma secuencia, junto con otras variables psicogenéticas del alumnado,¹⁸ han sido utilizadas para la asignación de los problemas por curso.

602. Repartí en partes iguales 9 lápices entre 3 amigos. ¿A cuántos toca cada uno? (3 – 27:10 ÷ 6:7)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 3 (9/3).

Número de veces ejecutado: 1033. De ellas, 950 bien y 88 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 15 segundos (14 en aciertos y 30 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 19% (17 sobre 88).

Comentarios:

La abstracción requerida para traducir una palabra (o todos los sinónimos de la misma) por una operación desborda el estricto campo de la matemática y se sitúa en un ámbito más genérico que conocemos como lenguaje. Y es en las matemáticas donde detectamos algunos de estos problemas de lenguaje, relacionados, sobre todo con de carencia de vocabulario y con de fineza semántica, muy presentes ambos en las deficiencias lectoras de los alumnos.

En el caso que nos ocupa, el error es el reparto al que alude el texto, es proyectado operacionalmente como multiplicar (10 veces) y como restar (7 veces).

Se trata de niños de 7 u 8 años, pequeños, de acuerdo, pero repartir con multiplicar o con restar en vez de hacerlo con dividir no puede ser tratado como no significativo. Es un fallo de lenguaje, de competencias lingüísticas básicas detectado por la RP y que deberían estar asimiladas perfectamente a las edades referidas.

18. La mayor parte de la investigación desarrollada por Jean Piaget se centra en el desarrollo del pensamiento en el niño a través de un continuo proceso adaptativo que se muestra mediante la asimilación y la acomodación. Conceptos como etapa preoperatoria, juego simbólico, imagen mental, operaciones concretas, reversibilidad, etc. pueden ser de mucha utilidad para la comprensión de los procesos de pensamiento infantil (J. Piaget-B- Inhelder, Psicología del niño, Morata, 24-01-2019, última edición).

1076. ¿Cuántos paquetes de 8 chicles puedo hacer con 200 chicles

(25 – 1600:17)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 25 (220/8).

Número de veces ejecutado: 1019. De ellas, 907 bien y 112 mal. Dificultad: 11%.

Tiempo medio de resolución: 25 segundos (21 en aciertos y 55 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 15% (17 sobre 112).

Comentarios:

A diferencia del anterior la elección de la operación a realizar no depende de una sola palabra sino de un contexto. La palabra hacer es muy genérica y no permite el salto a la operación por lo que se requieren apoyos contextuales para afinar el resultado.

También se ha de comentar que puede haber casos en la que la opción de la multiplicación tenga algo que ver con la menor dificultad esta que exige operación frente al cociente.

2145. Hay 56 niños. ¿Cuántos litros de agua necesito para dar 1/2 litro a cada uno?

(28 – 112:11)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: $28 = 56 \times 1/2$.

Número de veces ejecutado: 974. De ellas, 888 bien y 96 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 19 segundos (18 en aciertos y 31 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 50% (433 sobre 86).

Comentarios:

El presente problema presenta sobre los dos anteriores alguna dificultad relacionada con la presencia de la fracción $\frac{1}{2}$. 2 frente a 0.5, doble frente a mitad, producto frente a cociente.

Números y operaciones entrelazados. Conceptos giratorios y dependientes. Dificultades añadidas en la operatoria básica que requiere de más tiempo y dedicación de los utilizados por los currículos actuales. Ni existen atajos reales y consolidados, ni podemos garantizar eternamente el ludismo en el aprendizaje. Podemos frivolar y engañar, y seguro que muchos los agradecerán, pero eso es otra cosa distinta de enseñar y aprender.

4.3.4.4. Dividir en vez de multiplicar (27)

Vemos en esta categoría, complementaria de la anterior, cómo se alternan o reparten los errores en la atribución de los conceptos producto y cociente. Ambos, en sí mismos, no presentan dificultades, pero los contextos que los acompañan en los problemas pueden desdibujarlos en la práctica, hacer muy fina la línea de separación y generar fallos cuyo análisis suscita un cierto interés porque nos señala una realidad que no nos gusta reconocer, que es constatar un cierto nivel de fracaso escolar en los aprendizajes básicos, no generalizable, pero que necesita un largo recorrido si queremos minimizarlo.

1066. ¿Cuántos días son 33 semanas?**(231 – 4:7 ≠ 4:7:6)****Observaciones:**

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 231 (33×7).

Número de veces ejecutado: 964. De ellas, 892 bien y 72 mal. Dificultad: 8%.

Tiempo medio de resolución: 20 segundos (19 en aciertos y 38 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 18% (13 sobre 72).

Comentarios:

Es menos frecuente, aunque no excepcional, sustituir un producto por un cociente en la resolución de un problema. En este caso parece que existen alumnos con tendencia a sustituir semanas por días y días por semanas. Para ellos es como si el problema se formulara así *¿Cuántas semanas son 33 días?* Las respuestas, 4 y 4.7, se corresponde al resultado de dividir $33 / 7$, tomando solo la parte entera (1ª respuesta) y con un decimal (respuesta 2ª).

No tenemos explicaciones para dicho mecanismo más allá del típico despiste de alumnos poco centrados en la tarea escolar.

1286. Parto 12 barras de pan en 3 trozos cada una. ¿Cuántos trozos obtengo?**(36 – 3:9 ≠ 4:91)****Observaciones:**

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 36 (12×3).

Número de veces ejecutado: 1105. De ellas, 952 bien y 153 mal. Dificultad: 14%.

Tiempo medio de resolución: 20 segundos (21 en aciertos y 38 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 65% (100 sobre 153).

Comentarios:

Una parte de la dificultad del presente problema es el hecho de tener dentro de su texto la palabra trozo, que de por sí se asocia a reparto, división, etc, pero que el significado global del problema juega en contra, digamos. Vemos que hay no pocos alumnos que parecen sustituir **3 trozos cada una** por 3 partes o montones. Ese cambio es el que les lleva a dividir en vez de multiplicar. Para ellos **trozos** funciona como un semáforo verde que permite sin titubeos la división como operación a realizar, y tal seguridad impide que lean detenidamente el problema.

4.3.4.5. Sumar en vez de multiplicar (32)

Los fallos de la suma que sustituye a un producto pueden tener un cierto origen o explicación. Recordemos que la multiplicación es una suma rápida que acelera el lento proceso de la suma cuando los sumandos son iguales.

Pero no hablamos de estos casos en este punto sino de sustituciones de una operación por otra (sumar en vez de multiplicar o multiplicar en vez de sumar). Estos fallos pueden a veces conllevar a la adicción de magnitudes no homogéneas (manzanas con euros) cuyo inválido resultado pasa totalmente desapercibido por el alumno, lo que refleja, al mismo tiempo, una casi nula capacidad de verificación de la respuesta.

542. Si hiciera cada día 8 problemas ¿cuántos problemas haría en 7 días? (56 – 15:14 ‡ 63:6)

Observaciones:

Curso: 1º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 56 (8×7).

Número de veces ejecutado: 1047. De ellas, 948 bien y 126 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 22 segundos (17 en aciertos y 54 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 16% (20 sobre 126).

Comentarios:

Este problema, presentado en los alumnos más pequeños, muestra dos errores sistemáticos. El primero, 15, se obtiene con la suma de los datos (8 horas y 7 días) como si fuesen cantidades homogéneas y sumables. El alumno tendría problemas en justificar qué son esos 15, si problemas o días.

El segundo error sistemático, la respuesta 63, se realiza tras una multiplicación, aunque en esta ocasión el error viene del escaso dominio de las tablas de multiplicar (para estos alumnos el resultado de 8×7 es 63 en vez de 56).

1031. ¿Cuántos años suman la edad de 4 niños de 7 años cada uno? (28 – 11:35 ‡ 21:8 ‡ 3:9)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 28 (4×7).

Número de veces ejecutado: 1070. De ellas, 968 bien y 102 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 18 segundos (17 en aciertos y 31 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 50% (51 sobre 102).

Comentarios:

Tenemos un problema con la misma estructura que el anterior y donde se reproduce el mismo patrón de respuesta. Los alumnos a los que va dirigido este problema son un año mayores (2º Primaria), las respuestas son muy similares, si bien el nivel de dificultad es algo menor.

En la primera de ellas, 11, se suman las cantidades en vez de multiplicarlas.

En el segundo se multiplican, presuntamente, con el fallo en las tablas de multiplicar (4×7 no son 21 sino 28, es decir, la respuesta correcta.)

1378. ¿Cuántos cromos tendré si junto 9 sobres de 15 cromos cada sobre?

(135 – 24:9)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 135 (9×15).

Número de veces ejecutado: 1183. De ellas, 1087 bien y 96 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 30 segundos (28 en aciertos y 50 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 9% (9 sobre 96).

Comentarios:

Aunque los alumnos van siendo mayores (8 o 9 años, lo que equivale a 3º Primaria) continúa mostrándose el equívoco de sumar las cantidades en vez de multiplicarlas.

Bien es cierto que en este caso hemos de señalar que en el presente texto hay una palabra que posee una fuerza especial que puede desviar la atención del foco del problema. Se trata de *junto*, de una falsa pista o zancadilla para sumar en vez de multiplicar. (En el apartado 4.3.1. Distractores y dentro de él en el 4.3.1.3. Confusores, se puede ampliar estos comentarios).

4.3.4.6. Otros tipos de confusión. (13)

El abanico de confusión de las operaciones es tan amplio que podríamos poner ejemplos de cada uno de los posibles casos. Para evitar un anecdotario extenso en casos pero con frecuencias bajas, seguramente un poco aburrido y con escaso interés, los incluiremos en un único grupo y cerraremos estos cambios de operaciones en un único punto.

Se trata de casos que no han sido referenciados en los grupos que hasta ahora hemos comentado y que aportan algún nuevo matiz que valoramos de utilidad.

518. ¿Cuántas bolas hay en 4 cajas de 19 bolas cada una?

(76 – 15:7 ‡ 23:12 ‡ 4.75:8)

Observaciones:

Curso: 1º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 76 (4×19).

Número de veces ejecutado: 1033. De ellas, 909 bien y 124 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 25 segundos (20 en aciertos y 58 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 2% (27 sobre 124).

Comentarios:

En el presente caso vemos que la multiplicación ha sido reemplazada por el resto de las operaciones básicas. Recordamos que estamos hablando de alumnos de 6 o 7 años (1º Primaria) o nivel escolar aproximado.

La primera, $15 = 19 - 4$, por la resta

La segunda, $23 = 19 + 4$, por la suma, es el error sistemático más frecuente.

La tercera, $4.75 = 19 / 4$, por el cociente.

A medida que los alumnos van adquiriendo más maduración, los errores sistemáticos van tomando distintas concreciones que reflejan las dificultades más consistentes en RP.

1317. 15 es igual a 3 por ¿cuánto?

(5 – 12:6 ≠ 3:8)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 5 (15/3).

Número de veces ejecutado: 1114. De ellas, 1047 bien y 67 mal. Dificultad: 6%.

Tiempo medio de resolución: 12 segundos (11 en aciertos y 31 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 21% (14 sobre 67).

Comentarios:

Se trata de un problema con baja dificultad pero con una presencia de errores sistemáticos no despreciable (superior a 1 de cada 5).

La respuesta 12 (15 – 3) implica un error de restar en vez de dividir y la segunda (el 3) es una respuesta huidiza, influida por la presencia del dicho dato en la parte final del problema, que ya comentamos en el punto 4.3.1.4. Presión del primer o último dato

2492. Reparto 16 naranjas entre 5 niños. ¿Cuántas naranjas sobran después de repartirlas si no parto ninguna?

(1 – 11:6 ≠ 16:7 ≠ 3:9)

Observaciones:

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 1 ((6-5) × 1).

Número de veces ejecutado: 773. De ellas, 703 bien y 70 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 17 segundos (15 en aciertos y 38 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 31% (22 sobre 70).

Comentarios:

El texto del problema trabaja sobre la totalidad de los conceptos de la división.

No busca ni la asociación de los vocablos con la operación ni tampoco si se domina la dinámica de la misma.

Busca, a través de los errores, si se identifica correctamente los conceptos dividiendo, divisor, cociente y, sobre todo resto. Y todo ello en alumnos mayores de Primaria. Es decir, 1 de cada 10 alumnos de 5º curso este Ciclo (10 u 11 años), presenta deficiencias en el concepto de división: la respuesta 11 sustituye la división por la resta, la 16, da el primer dato presenta del problema y finalmente el 3, es el resultado de la división al que se ha suprimido la parte decimal.

4.3.4.7. Eliminar operaciones (99)

No son despreciables los problemas donde, para obtener el resultado, se ignora total o parcialmente las operaciones que se deberían hacer.

Los alumnos protagonistas de este tipo de fallos se suelen mover entre el total *pasotismo*, y una falta de motivación, que puede incluir deficiencias de escolaridad y niveles de maduración muy bajos. En este último caso, el mecanismo bien pudiera ser *dar una respuesta es mejor que ninguna, puede acertar por casualidad* o similares.

433. Ana tenía 8 bolas y perdió 4 pero encontró 6 más. ¿Cuántas bolas tiene ahora?

(10 – 14:6)

Observaciones:

Curso: 1º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 10 (8-4+6).

Número de veces ejecutado: 1049. De ellas, 966 bien y 83 mal. Dificultad: 7%.

Tiempo medio de resolución: 19 segundos (17 en aciertos y 42 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 7% (6 sobre 83).

Comentarios:

La supresión de alguna operación que necesita el problema no es extraña cuando este requiere más de una operación, lo que suele ir paralelo a un aumento de la dificultad, y los alumnos son más bien pequeños. En este caso, donde se suprime la operación resta (correspondiente al término *perdió*) se suman los datos primero y último que aparecen en el texto.

El error en cuestión no parece tratarse de un olvido sino más bien de la evitación de una cierta dificultad que puede ser la presencia de dos operaciones distintas o la dificultad de asignar a *perdió* la operación correspondiente.

915. En el frigo hay 3 docenas de huevos y meto 6 huevos más. ¿Cuántos huevos hay? (42 – 18:7 ≠ 36:18 ≠ 9:13)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 42 ((3 × 12)+6).

Número de veces ejecutado: 976. De ellas, 866 bien y 110 mal. Dificultad: 11%.

Tiempo medio de resolución: 20 segundos (17 en aciertos y 47 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 34% (38 sobre 110).

Comentarios:

Tenemos en este problema 3 errores sistemáticos que explican más de un tercio del total de errores cometidos.

El **primero**, 18, es obtenido multiplicando 3 y 6 (que son los datos numéricos que muestra el problema) e ignorando otro dato *docenas* cuya invisibilidad está seguramente relacionada con su presentación literal. En el **segundo**, 36 (3 × 12), se interpreta bien el dato *docenas* pero se ignoran los 6 huevos más que añado a los anteriores. El **tercero**, 9 (3 + 6), nos da la respuesta que creemos menos evolucionada o madura de las tres dadas. Los alumnos toman los datos numéricos y los suman sin más. No hay ningún tipo de atisbo ni de matiz ni de consideración de dificultad. No hay dudas ni *docenas* ni multiplicaciones.

1886. Tengo 13 cromos y mi amiga 7 más que yo. ¿Cuántos cromos tenemos entre las 2? (33 – 20:25 ‡ 23:6)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 33 ($13+(13+7)$).

Número de veces ejecutado: 992. De ellas, 905 bien y 87 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 15 segundos (14 en aciertos y 22 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 36% (31 sobre 87).

Comentarios:

También los fallos de este problema están relacionados con la supresión de una operación, pero las dificultades y edad de los alumnos a los que va dirigido es mayor. La respuesta correcta, 33 ($13+13+7$), requiere interpretar correctamente sumar dos veces 13 y añadirle 7 más, así como despreciar el número dos, que en este caso actúa como un mero confusor.

La primera respuesta, 20 ($13+7$), ignora el significado *más que yo* que en este caso significa $13+7$ a los que se deberán añadir los 13 cromos míos.

En la segunda, 23 ($13+7+2$ ¿con algún error de suma?), se operan los tres datos que aparecen en el problema.

4.3.4.8. Añadir operaciones (94)

Deliberadamente, algunos problemas muestran más datos de los necesarios para obtener la respuesta e intentan reforzar lo que debería ser un hábito, leer y releer el problema hasta comprender el texto. Una parte relevante de los alumnos tienden a operar todos los datos del problema, no solo los que contienen información de interés para su resolución. En estos casos, lo más frecuente es sumarlos, no restarlos, quizás porque se trata de la operación con menos dificultad. Todo parece indicar que los datos irrelevantes o estímulos falsos provocan cierres erróneos, en terminología de la Gestalt, que se traduce en errores sistemáticos en las respuestas.

748. Comí 13 uvas y mi prima 9 uvas y 5 mandarinas. ¿Cuántas uvas comimos entre los dos?

(22 – 21:7 ± 27:30 ± 4:13)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 22 (13+9).

Número de veces ejecutado: 1057. De ellas, 931 bien y 126 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 21 segundos (17 en aciertos y 48 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 40% (50 sobre 126).

Comentarios:

Aquí hay dos tipos de frutas, uvas y mandarinas, siendo estas segundas junto a su cantidad, elementos contaminantes que han de ser descubiertos como tales. Surgen tres errores sistemáticos. El primero, 21 (13 + 9), seguramente con un error mecánico en la suma, pero no en la comprensión ni en el hecho de operar más datos de los necesarios.

El segundo, 27 (13 + 9 + 5) con un claro error de comprensión del texto del problema, añadiendo la cantidad de las irrelevantes mandarinas.

El tercero, 4 (13 – 9), la respuesta que confunde la operación a realizar, sustituye la suma por la resta, lo que no es fácilmente explicable, pero que deja sin operar las mandarinas, es decir manteniendo la comprensión del texto..

1021. Cené 5 peras y Carlos 7 peras y 2 plátanos. ¿Cuántas peras comimos los 2?

(12 – 14:18 ± 7:7)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 12 (5+7).

Número de veces ejecutado: 1187. De ellas, 1089 bien y 98 mal. Dificultad: 8%.

Tiempo medio de resolución: 21 segundos (20 en aciertos y 34 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 25% (26 sobre 98).

Comentarios:

Problema muy similar al que le precede con respuestas también parecidas. No nos detendremos mucho en él.

La respuesta 14 (5 + 7 + 2) con falta de comprensión del texto (añadir los plátanos).

La respuesta 7 (7 o 5 + 2), las peras de Carlos o juntar peras con plátanos.

1444. En 25 cajas tengo 30 bolsas de bolas. Cada bolsa costó 7 euros. ¿Cuánto gasté?

(210 – 175:16 + 5250:61)

Observaciones:

Curso: 3ª Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 210 (30×7).

Número de veces ejecutado: 1140. De ellas, 973 bien y 167 mal. Dificultad: 15%.

Tiempo medio de resolución: 36 segundos (29 en aciertos y 78 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 46% (77 sobre 167).

Comentarios:

El dato de distorsión en este problema son las 25 cajas (información irrelevante) que entorpecen la comprensión.

En la primera respuesta, 175 (25×7), se toma como dato el ruido (25) y viceversa (30).

La segunda, 5250 ($25 \times 30 \times 7$), comete el error de incluir el ruido (25) en el producto.

Destacamos la dificultad ligeramente más alta del problema (15%), el porcentaje de errores sistemáticos sobre el total de ellos (46%) y la mayor frecuencia de la segunda respuesta (5250: 60) frente a la primera (175: 16)

4.3.5. Geometría (Geo.119)

Ya hemos comentado con anterioridad que la reducción de los contenidos de Geometría dentro de los currículos de la enseñanza básica ha caído a niveles mínimos y de forma ininterrumpida en las sucesivas leyes educativas que se vienen produciendo desde, al menos, la Ley General de Educación de 1971 de Villar Palasí, que con la EGB ampliaba la obligatoriedad durante dos años al tiempo que le eran sustraídos a la secundaria.

Los resultados de esa falta de profundidad, cuando no directamente inexistencia, de tales contenidos no está oculta y se manifiesta de forma patente a poco que nos propongamos explorar la calidad de tales conocimientos.

Tal es el caso que nos ocupa. Tenemos una muestra no demasiado grande de problemas pero a través de ella podemos detectar dos tipos de deficiencias concretas que consideramos de interés resaltar.

La primera es la falta de familiaridad con los conceptos geométricos básicos como nombres, elementos, clasificaciones, categorías, etc.

La segunda, la dificultad para resolver sencillos problemas relacionados con áreas o volúmenes polígonos o cuerpos más usuales.

Y no. No se trata del desconocimiento o falta de retención memorística de complejas y enrevesadas fórmulas que han de ser aplicadas para la obtención del resultado, sino desconocimiento del terreno previo básico al uso de estas, que podrían englobarse en carencias de terminología elemental y deficiencias o ausencia de conceptos base.

4.3.5.1. Punto, recta, plano (41)

Las imprecisiones en los aspectos elementales de la geometría están en la base y son la causa de los déficits de conocimientos geométricos posteriores.

Los primeros problemas relacionados con la geometría que aparecen en nuestra base de datos lo hacen en tercer curso de Primaria, es decir, después de un par de cursos en los que se han de asentar contenidos previos.

Es a partir de ese curso cuando hacemos nuestras observaciones.

La indiferenciación y/o confusión de los tipos de ángulos, la imprecisión entre los elementos de medida de los mismos (grados, minutos y segundos), el desconocimiento de conceptos como radio, diámetro... por no hablar de otros como Pi, la altura del prisma truncado, el baricentro, las características de los paralelogramos o la clasificación de los triángulos según sus lados o sus ángulos, etc., son el antecedente de la falta de importancia de sus contenidos en nuestros programas escolares y lógicamente de los fallos geométricos que hemos detectado de la que a continuación se da una pequeña muestra.

1929. ¿Cuántos ángulos rectos tiene un triángulo rectángulo?

(1 – 2:26 # 3:66 # 4:30)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 1 (1).

Número de veces ejecutado: 989. De ellas, 849 bien y 140 mal. Dificultad: 14%.

Tiempo medio de resolución: 18 segundos (15 en aciertos y 35 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 87% (122 sobre 140).

Comentarios:

A los 9 – 10 años (4º Pr.) casi uno de cada seis alumnos no tiene asimilados los conceptos geométricos de *ángulo recto* o *triángulo rectángulo* o ambos. Tampoco otros igualmente básicos como veremos.

La primera y tercera respuestas, 2 y 4 respectivamente, reflejan que no se identifica triángulo con nada relacionado con 3, sino con 2 y con 4.

La segunda respuesta, 3, correcta como número de ángulos pero no como ángulos rectos del triángulo, refleja que el alumno es incapaz de ver la imposibilidad de construir un triángulo con 3 ángulos que suman 270° , es decir, también desconoce, obviamente, que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° .

2585. ¿Cuántos ángulos agudos tiene un hexágono regular?

(0 – 2:16 † 3:9 † 4:10 † 6:46)

Observaciones:

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 0 (0).

Número de veces ejecutado: 869. De ellas, 756 bien y 113 mal. Dificultad: 13%.

Tiempo medio de resolución: 18 segundos (11 en aciertos y 60 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 72% (81 sobre 113).

Comentarios:

Desconocimiento para buena parte de la población de 10 – 11 años, 5º Pr., de la figura del hexágono. Eso, al menos.

Podría ser, además, que se desconociera el número de lados del polígono, el concepto de *regular* aplicado al mismo o el significado de otros vocablos previos como por ejemplo *cuántos grados mide un ángulo agudo*.

3341. ¿Cómo se llama el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo?

(1) cateto mayor, (2) hipotenusa, (3) altura, (4) bisectriz.

(2 – 4:6)

Observaciones:

Curso: 6º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 2 (2).

Número de veces ejecutado: 843. De ellas, 765 bien y 58 mal. Dificultad: 7%.

Tiempo medio de resolución: 12 segundos (10 en aciertos y 38 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 10% (6 sobre 58).

Comentarios:

El presente problema, que requiere cierto conocimiento geométrico, presenta una dificultad baja. Pensamos que su baja dificultad se deriva del tipo de respuesta, de elección no de elaboración, lo que explicaría por azar, el acierto de una cuarta parte de las respuestas. Bueno, tal vez deberíamos hablar más que de una conclusión de una conjetura.

4.3.5.2. Figuras planas y cuerpos (78)

Aparte de los conocimientos teóricos sobre geometría que acabamos de ver, en el presente punto, complementario de él, mostraremos los fallos prácticos que surgen al resolver problemas cuyo contenido esté relacionado con diferentes conceptos geométricos.

Operaciones con grados, minutos y segundos, agravados por la operatoria sexagesimal que implican, cálculo de lados, ángulos o superficies en figuras planas, a las que se ha de añadir volúmenes en el caso de figuras geométricas, manejo de conceptos como Pi en las figuras o cuerpos basados en circunferencias, aplicación práctica del conocimientos de teoremas, preguntas de entramado lógico entre las clasificaciones de triángulos según los lados o los ángulos... y otros muchos aspectos serán tocados en este apartado.

2314. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado cuyo lado es de 28 m?**(112 – 56:7 ÷ 7:15)****Observaciones:**

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 112 (28×4).

Número de veces ejecutado: 969. De ellas, 881 bien y 88 mal. Dificultad: 11%.

Tiempo medio de resolución: 17 segundos (15 en aciertos y 38 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 25% (22 sobre 88).

Comentarios:

El desconocimiento y/o falta de precisión de los conceptos geométricos no supone solamente un déficit de tipo lingüístico sino que supone una auténtica rémora para la comprensión espacial y la interpretación de realidades físicas con las que nos toca vivir habitualmente. La quiebra de los primeros escalones asegura no poder utilizar la escalera que lleva a la reflexión y el conocimiento. Sin palabras no hay conceptos, y si los hubiera no serían transmisibles ni aprendibles.

3113. ¿Cuál es la superficie de un cuadrado de lado 18 cm?**(324 – 72:13)****Observaciones:**

Curso: 6º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 324 (18×18).

Número de veces ejecutado: 865. De ellas, 786 bien y 79 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 16 segundos (12 en aciertos y 59 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 16% (13 sobre 79).

Comentarios:

Acabando la Primaria, 11 –12 años, uno de cada diez alumnos aún confunden la superficie con el perímetro de una figura, lo que los incapacita para medir ambos.

Es muy posible que estos déficits no estén encapsulados y se presenten acompañados con otros tales como la ignorancia del comportamiento de las unidades de superficie, el desconocimiento de las fórmulas de cálculo de áreas o volúmenes.

4214. Algún triángulo rectángulo es acutángulo. (1) verdadero / (2) falso / (3) a veces.**(2 – 3:7)****Observaciones:**

Curso: 2ºESO.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 2 (2).

Número de veces ejecutado: 629. De ellas, 582 bien y 47 mal. Dificultad: 7%.

Tiempo medio de resolución: 8 segundos (8 en aciertos y 13 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 15% (7 sobre 167).

Comentarios:

Como ya hemos comentado en otras ocasiones los problemas con elección de respuesta, frente a los que requieren la elaboración de la misma, muestran una dificultad inferior que está relacionada con el número de opciones ofrecidas (menos opciones, más aciertos).

Este problema dirigido a 2º de ESO, alumnos de 13 –14 años, mezcla conocimientos sobre los *tipos de triángulos según sus ángulos* (acutángulo significa todos los ángulos agudos) y algo de lógica sobre las relaciones entre los elementos de dicha categoría. Conceptos bastante simples y manejables para alumnos de la edad citada.

4.3.6. Lógica (Log.51)

Los problemas de este apartado buscan situar al alumno frente a contradicciones aparentemente manifiestas, para provocar razonamientos que le permitan salir airoso de las situaciones planteadas.

La mayor parte de este tipo de problemas tienen un elemento en común: salirse del enunciado estándar, donde la permanencia de cada elemento es a un único grupo, que facilita las agrupaciones y las operaciones entre los elementos.

La existencia de objetos que pueden poseer más de una característica crea situaciones nuevas, o no habituales, que pueden resultar estimulantes para algunos alumnos mientras que otros evitarán el conflicto con diversas estrategias equivocadas, alguna de las cuales veremos a continuación.

Lo haremos a través de tres problemas que tienen la misma armadura aunque pueden tomar muchas formas distintas en base a la pertenencia a diferentes categorías de agrupación como pueden ser colores, tamaños, formas, etc. que nos permitirán observar las situaciones presentadas, la fuerza y consistencia de los errores y el manejo de los recursos lógicos para dar respuesta al problema.

1905. Hay 52 bolas. 27 son rojas y 5 azules. ¿Cuántas son de otro color?

(20 – 18:6 ÷ 22:9)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 20 (52-27-5).

Número de veces ejecutado: 1276. De ellas, 1154 bien y 124 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 24 segundos (22 en aciertos y 44 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 12% (15 sobre 124).

Comentarios:

Desconocemos el mecanismo que pueda explicar como se ha llegado a la respuesta 18.

Respecto a la segunda respuesta, 22 (27 – 5), lo que ha ocurrido es que en vez de sumar dichas cantidades para restarlas juntas de la primera, se han restado entre sí.

Tal vez, la fuerza y viveza de los colores (rojo y azul) de las bolas que sabemos coloreadas se hayan dejado atrapar por el *otro color* final, donde dicho *otro color* se haya traducido en una resta de *rojas menos azules*.

2413. Hay 53 bolas. 13 son rojas y 28 grises. ¿Cuántas son distintas de rojas?

(40 – 12:11 ± 28:9)

Observaciones:

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 40 (53-13).

Número de veces ejecutado: 963. De ellas, 849 bien y 114 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 18 segundos (14 en aciertos y 49 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 18% (20 sobre 144).

Comentarios:

Este problema muestra un potente distorsionador **28 grises** que no debería intervenir en su resolución, pero lo hace.

En la primera respuesta, 12 (53 – 13 – 28), se restan las bolas coloreadas del total de bolas, es decir, se ignora **distintas de rojas** solicitado en la pregunta y se añaden al sustraendo las 28 grises, que son justamente las únicas que han de ser sustraídas.

En la segunda, exige mantener sin operar las bolas rojas y restar del total solo las 28 que son de color gris o **distintas de rojas**. (Recordamos también lo comentado en el punto 4.3.4.8. Añadir operaciones).

3141. Tengo 56 bolas. 35 son verdes y 30 grandes. ¿Cuántas verdes grandes hay?

(9 – 30:17)

Observaciones:

Curso: 6º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 9 (35+30-56).

Número de veces ejecutado: 805. De ellas, 741 bien y 64 mal. Dificultad: 8%.

Tiempo medio de resolución: 12 segundos (10 en aciertos y 29 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 27% (17 sobre 64).

Comentarios:

En una primera mirada, la dificultad de este problema se centra en que el total de bolas (56) es menor que la suma de (por así decirlo) las partes **35 verdes** y **30 grandes**, y eso es una contradicción, un descuadre.

Por si esto fuera poco, tenemos la palabra **grandes** repetida en el texto, la primera vez como atributo de un dato y la otra como parte de la pregunta. Ello lleva a identificar 30 como la respuesta del problema a más de la cuarta parte de los alumnos que se equivocan.

Superarla, exige ver la categoría de **verdes** y de **grandes** como no excluyentes o independientes, es decir, asumir como posible la pertenencia a ambas de una forma no disjunta, de elementos no totalmente ajenos, de intersección no vacía.

4.3.7. Multiplicativos y partitivos (Mpx.475)

Aunque la mayor parte de los problemas y fallos que se recogen en este apartado podrían haber sido incluidos en otros (ver apartado 4.3.4. **Concepto de operación. Multiplicar en vez de dividir y Dividir en vez de multiplicar.**), hemos apostado por esta categoría para dar visibilidad a las confusiones que existen entre conceptos inversos, intercambios entre productos y cocientes en torno al número 2 (mitades y dobles), al 3 (tercios y triples), al 4 (cuartos y cuádruples), etc. Creemos que este grupo de errores merece una mención aparte y una diferenciación de otros que ya hemos comentado.

No se trata de simples errores asociados únicamente al producto y cociente, sino, también, a operadores (factores o divisores) de uso muy frecuente, los de los números: 2, 3, 4 y 5 sobre todo. Se trata de confusiones entre inversos, entre doble y mitad, entre tercio y triple, entre cuarto y cuádruple, etc, y creo que tienen sustancia en sí mismos y merecen ser puestos de manifiesto, al menos para poder incidir en su futura corrección.

Cuando dichos números, u otros, actúan como factores lo denominamos genéricamente multiplicativos y cuando lo hacen como divisores serán tratados globalmente como partitivos.

Se trata de una categoría muy amplia (475 problemas) que además de los multiplicativos y partitivos más comunes, incluye el vocablo *veces* precedido de una cantidad que puede actuar como multiplicativo sobre todo o como partitivo si va seguido de la palabra *menos* o *menor*.

4.3.7.1. Doble (41)

Comenzaremos con los multiplicativos, conceptos pensados como factores y que sustituyen a *multiplicado por x* (siendo x un número natural menor que 10) y que dan lugar a doble, triple etc.

Doble es el concepto evolutivamente más temprano de todo el grupo porque también es el más sencillo. Está bastante presente en el lenguaje cotidiano y con el que antes se comienza a trabajar en las aulas.

Se trata de problemas en los que el concepto doble es incorrectamente usado y sustituido por mitad, si bien es cierto que dicho error, además de presentarse en su forma pura, puede ser compartido con otros (fallos en el cálculo, en los decimales, etc.).

Originalmente, es decir, tempranamente en términos de escolaridad, el cálculo del *doble de algo* se obtiene sumando algo dos veces. En los primeros cursos de Primaria aún no están totalmente dominadas las tablas de multiplicar ni afianzada la operación, pero ello no impide comprender el concepto doble, ni utilizarlo mediante la suma, normalmente ya conocida.

Ejemplos: 762, 801, 963

762. ¿Cuánto es el doble de 129 personas?**(258 – 158:9 ≠ 64:7)****Observaciones:**

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 258 (129×2).

Número de veces ejecutado: 1044. De ellas, 935 bien y 109 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 20 segundos (17 en aciertos y 43 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 15% (16 sobre 109).

Comentarios:

Las dos respuestas presentadas en este problema reflejan los puntos débiles en la adquisición de nuestro concepto.

La primera, 158, es el resultado de una suma mal hecha, con errores, donde el error de la cifra de la izquierda, el 1, debería ser un 2.

La segunda, 64, refleja un error de concepto (utilizar el doble como sinónimo de mitad) y proceder a repartir o dividir.

Y vemos que a través de ese reparto o tanteo con sucesivos dobles hasta acercarse a la respuesta, según los casos, no se llega a la precisión decimal del 0.5 que requiere la operación bien hecha.

801. ¿Cuánto es el doble de 36 elefantes hembras?**(72 – 18:10)****Observaciones:**

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 72 (36×2).

Número de veces ejecutado: 995. De ellas, 957 bien y 38 mal. Dificultad: 4%.

Tiempo medio de resolución: 15 segundos (13 en aciertos y 38 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 12% (10 sobre 83).

Comentarios:

Problema con una dificultad excepcionalmente muy baja.

Pocos errores en general, y dentro de los sistemáticos, los derivados del deslindamiento entre doble y mitad.

963. ¿Cuánto es el doble de 18 estufas de gas butano?**(36 – 26:20 ≠ 9:26)****Observaciones:**

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 36 (18×2).

Número de veces ejecutado: 1204. De ellas, 1088 bien y 116 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 19 segundos (18 en aciertos y 32 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 40% (46 sobre 116).

Comentarios:

En este problema se repite la estructura de los errores que ya hemos comentado anteriormente.

Cálculos con error en la obtención del **doble** ($18 \times 2 = 26$ en vez de 36) y uso incorrecto de **mitad** que sustituye a doble.

4.3.7.2. Triple (27)

Lo que en el punto anterior comentamos con la pareja de conceptos doble/mitad lo haremos extensivo en el caso de triple/tercio (tercera parte).

Como ya hemos comentado, no siempre aparece el error de forma pura, sino que puede combinarse con otros fallos y adquirir formas muy creativas y sorprendentes (cambiarse por un doble, desaparecer o convertirse en inane, etc.).

Ciertamente tenemos menos casuística porque triple también es menos usado que doble en lenguaje coloquial, pero el comportamiento es análogo al que ya hemos comentado.

Veamos un par de ejemplos. Ejemplos: 1028 (triple/doble), 2374(triple/nada)

1028. ¿Cuánto es el triple de 297?

(891 – 594:22)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 891 (297×3).

Número de veces ejecutado: 1099. De ellas, 986 bien y 113 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 21 segundos (19 en aciertos y 44 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 20% (17 sobre 64).

Comentarios:

En este caso concreto todos los errores sistemáticos que podemos mostrar caen del lado de la sustitución de triple por doble. No es que no existan otros fallos, pero estos han sido ignorados por representar unas frecuencias inferiores a un mínimo marcado. Ver 2.1. Web www.winmates.net y 2.3.3. Depuración: Base2486, para más información.

2374. El triple de un número más 25 es igual a 100. ¿Qué número es?

(25 – 75:19)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 25 ($100 - (3 \times 25)$).

Número de veces ejecutado: 938. De ellas, 850 bien y 78 mal. Dificultad: 8%.

Tiempo medio de resolución: 18 segundos (16 en aciertos y 40 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 24% (19 sobre 78).

Comentarios:

Vemos en este problema que, más que tratarse de un error con el concepto triple, se trata de un error de comprensión global del texto. Puede ocurrir que el vocablo *triple* no sea ajeno a esta falta de comprensión, pero lo cierto es que la respuesta 75 (25×3) es el triple del dato 25, que es lo que le falta al triple del número pedido para valer 100.

No es infrecuente que conceptos confusos para algunos alumnos irradien confusión en el terreno de la comprensión, en este caso, o de la mecánica operatoria, en otros.

4.3.7.3. Otros, veces (53)

No vamos a alargarnos con la lista de multiplicativos siguientes a triple porque no aportaría demasiada información de interés sobre lo que hemos comentado. Lo que si deseamos mostrar es el comportamiento del concepto *veces* que acompaña en bastantes ocasiones los citados multiplicativos.

Hemos de decir que este concepto es difícilmente comprendido por los niños más pequeños, los de 6 a 7 años o mayores con algún tipo de retraso o deficiencia escolar. No es raro ver como *veces* es ignorado, utilizado como doble o triple de la cantidad que acompaña, o sustituido por cualquier otra operación.

El rango de acciones que pueden sustituir a *veces* nos informa de que se trata de un concepto que presenta para una parte del alumnado, seguramente la más inmadura, más dificultades de las que suponemos, desde los libros, los problemas, las explicaciones y las lecciones.

283. ¿Cuántos son tres veces un lápiz?**(3 – 1:7 † 6:16 † 9:15)****Observaciones:**

Curso: 1º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 3 (3×1).

Número de veces ejecutado: 1121. De ellas, 998 bien y 123 mal. Dificultad: 11%.

Tiempo medio de resolución: 17 segundos (15 en aciertos y 31 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 31% (38 sobre 123).

Comentarios:

Tenemos tres respuestas con errores sistemáticos de una cierta variedad.

En la respuesta 1, la primera, parece ser que *tres veces* ha sido totalmente diluido o ignorado y la respuesta coincide con el último dato presentado *un lápiz* aunque sea con literalidad numérica.

En la segunda y la tercera, 6 y 9, las respuestas se obtienen por multiplicar *3 veces* por 2 y por 3 respectivamente que no sabemos explicar. Lo cierto es que en ellas no entra en juego el dato *un 1*.

654. Si David tiene 3 cuentos y yo tengo tres veces más que él. ¿Cuántos tengo yo?**(9 – 3:8 † 6:64)****Observaciones:**

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 9 (3×3).

Número de veces ejecutado: 1078. De ellas, 928 bien y 150 mal. Dificultad: 14%.

Tiempo medio de resolución: 16 segundos (14 en aciertos y 29 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 48% (72 sobre 150).

Comentarios:

Es posible que la primera respuesta, 3, tenga que ver con que 3 sea el único dato numérico, mejor dicho número, del problema. En todo caso se trata de un error de frecuencia más bien baja (8) si lo comparamos con las 64 ocurrencias de la segunda respuesta.

Esta segunda, 6, se obtiene sumando 3 consigo mismo dos veces, esto es, el doble. Tal vez el *más* del *tres veces más* haya influido en sumar 3 a 3 en vez de multiplicar 3 por 3 como sería lo correcto.

4.3.7.4. Mitad o medio/a (171)

Comenzamos aquí los conceptos partitivos más usuales que son los divisores que utilizan los primeros naturales (excluido el 1) y que se corresponden con mitad, tercio, cuarto, quinto, etc.

Aparecen en muchos más problemas, tienen, en general, más dificultad objetiva que los multiplicativos del punto anterior y también tardan más tiempo en ser integrados correctamente dentro de las estrategias calculatorias de los alumnos.

Mitad comparte significado con medio/a y eso tiende a complicar algo la situación. Como ya hemos comentado previamente, pensamos que la falta de nitidez o precisión de los mismos junto a las dificultades añadidas en torno a otros conceptos del texto, generan un rango de errores significativamente más amplio que cuando el concepto en cuestión se presenta de forma limpia y aislada.

Aquí mostraremos ejemplos de estos problemas en grupos de alumnos de edades bajas, de los primeros cursos de Primaria donde las dificultades se muestran de una forma clara y que con el tiempo irán disminuyendo, pero sin ser eliminadas por completo. Insistimos en que los errores suelen ver potenciada su dificultad ante la complejidad de los textos u otros obstáculos como pueden ser la presencia de números decimales, negativos, etc.

617. ¿Cuánto es la mitad de 2 pasteles de chocolate?

(1 – 2:16 ‡ 4:72)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 1 (2 / 2).

Número de veces ejecutado: 957. De ellas, 838 bien y 119 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 13 segundos (10 en aciertos y 30 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 74% (88 sobre 119).

Comentarios:

La primera respuesta, 2, ignora totalmente el efecto de la palabra *mitad*, es decir, la ignora como dato con el que haya que operar.

En la segunda, 4, con mucha más frecuencia que la primera (72 frente a 16), el error viene de sustituirla por el concepto doble, es decir multiplicando en vez de dividiendo por dos, el dato de referencia. Es decir, el 2 (de mitad) que actúa como factor (multiplicando) en vez de como divisor.

1285. ¿Cuántos meses son la mitad de 35 meses? (17.5 – 12.5:8 ‡ 15:9 ‡ 17:65 ‡ 18:12 ‡ 35:7 ‡ 7:6 ‡ 70:8)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 17.5 (35 / 2).

Número de veces ejecutado: 1228. De ellas, 1040 bien y 188 mal. Dificultad: 15%.

Tiempo medio de resolución: 32 segundos (27 en aciertos y 59 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 52% (98 sobre 188).

Comentarios:

Vemos en este problema el resultado de utilizar *mitad* sobre un número impar de meses. Hay dos elementos en este texto que le complican la existencia a esa mitad. El primero, la inmaterialidad de meses (ni son manzanas que se puedan tocar ni tampoco todos tienen la misma medida), y el segundo se presenta un dividendo impar que requerirá un resultado decimal. Los resultados son una alta dificultad del problema (15%) y una mayor diversificación de respuestas que reflejan más variedad de mecanismos resolutorios: errores mecánicos, aproximaciones por defecto o exceso que evitan el decimal y confusión con el vocablo *doble*. Estos dos aspectos, la mayor diversidad de respuesta y mayor dificultad están afectadas por el *meses* y por el decimal del resultado.

4.3.7.5. Tercio o tercera parte (51)

Tercio es mucho menos utilizado que *mitad* tanto en el uso cotidiano como en los problemas de la muestra. Evolutivamente, su comprensión y uso correcto es posterior a *mitad* y los errores con los que se encuentra (triple, doble, añadir 3, etc.) tienden a ser más persistentes.

Los casos que presentamos a continuación reflejan estas observaciones así como la variedad de los fallos, resultado de la falta de nitidez del error y la permeabilidad entre distintos tipos de confusión en torno al concepto.

977. ¿Cuánto es la tercera parte de 12? (4 – 3:22 ‡ 6:10 ‡ 9:7)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 4 (12 / 3).

Número de veces ejecutado: 1128. De ellas, 990 bien y 138 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 17 segundos (14 en aciertos y 34 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 30% (39 sobre 132).

Comentarios:

La primera de las 3 respuestas de este problema, 3, la que más frecuencia de casos aporta, corresponde a lo expuesto en el punto 4.3.1.4. Presión del primer o último dato, es decir, recurrir a uno de ellos cuando no se tiene claro que hacer ese texto. Es cierto que, en este caso, habría que sustituir el 3 por el concepto *tercera parte*, que son inversos, pero solo para quien es capaz de percibirlos como tales. Para los que no, son iguales o parecidos.

En la segunda respuesta, 6, *tercera parte* ha sido sustituido por *mitad*. La respuesta 9 creemos que contiene un error doble. El primero confundir *tercera parte* con tres y el segundo *restar* (confundir la operación) a 12 los 3 de la tercera parte.

1219. ¿Cuánto es la tercera parte de la tercera parte de 27? (3 – 1:10 ‡ 243:10 ‡ 27:6 ‡ 81:15 ‡ 9:127)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 3 ($27 / 3 / 3$ o $27 / (3 \times 3)$).

Número de veces ejecutado: 1065. De ellas, 885 bien y 178 mal. Dificultad: 7%.

Tiempo medio de resolución: 21 segundos (17 en aciertos y 44 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 89% (158 sobre 178).

Comentarios:

La dificultad de dos terceras partes encadenadas parece ser que ensombrece la comprensión del problema e incrementa el rango de errores sistemáticos producidos.

En la primera respuesta, 1, es como si hubieran realizado tres divisiones consecutivas en vez de dos, es decir, $((27 / 3) / 3) / 3$.

En la segunda, 243, se han producido dos multiplicaciones de 27 por 3, es decir, la base del error ha sido confundir tercera parte con 3.

En la tercera, 27, tenemos la presión del último dato.

En la cuarta, 81, se ha ignorado una **tercera parte** y la otra se ha confundido con 3.

En la quinta, 9, se ha calculado correctamente la primera tercera parte, pero la segunda no ha llegado a calcularse.

1640. ¿Cuántas horas son 66 tercios de hora? (22 – 1:6 ‡ 1320:8 ‡ 16.5:6 ‡ 198:14 ‡ 3:8 ‡ 33:9)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 22 ($66 / 3$ o $66 \times (1 / 3)$).

Número de veces ejecutado: 993. De ellas, 859 bien y 134 mal. Dificultad: 13%.

Tiempo medio de resolución: 30 segundos (24 en aciertos y 68 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 39% (53 sobre 134).

Comentarios:

Se trata de cambiar tercios a unidades y la comprensión del texto pasa por entender que para obtener una unidad hemos de juntar tres tercios ($3 \times 1/3 = 1$).

Tenemos una amplia variedad de errores sistemáticos reflejo de las variantes de mecanismos mentales para la resolución del problema.

La respuesta 1, la primera, no sabemos cómo se obtiene. Pero no es inusual poner el 1 como respuesta cuando no se sabe que responder. Es el número que se encuentra más a mano, o al menos el primero de ellos, el que está más a la izquierda.

La segunda 1320 ($66 \times 2 \times 10$). Se toma tercio por doble y por si no fuera suficiente con ese error se multiplica también por 10. Desconocemos el porqué de esta última operación.

En la tercera, 16.5 ($66 / 4$), la confusión consiste en utilizar el concepto cuarto para el vocablo tercio.

En la cuarta, 198 (66×3) se ha utilizado tercio como multiplicativo (triple) en vez de como partitivo –tercera parte–.

La quinta, 3, no encontramos otra explicación que no sea la de la relación que tiene con $1/3$, justamente su inverso, es decir, una variante de la presión del último dato del texto comentada en el punto 4.3.1.4.

En la sexta, 33, el error consiste en confundir el concepto tercio con el con mitad.

4.3.7.6. Cuarto o cuarta parte (101)

El vocablo *cuarto* es más utilizado tanto en lenguaje común como matemático que tercio, y también, seguramente por más conocido, es más fácilmente corregible. La familiaridad del concepto *cuarto*, antes por medio del uso de la moneda y ahora que esta ha caído en desuso por la partición de las pizzas o las tartas, etc, no debe ser muy lejano a esa mejor predisposición a un uso correcto más temprano de este partitivo.

819. ¿Cuánto es la cuarta parte de 4 dedos de los pies?

(1 – 16:38 ‡ 20:7 ‡ 4:21 ‡ 8:25)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 1 (4 / 4).

Número de veces ejecutado: 1116. De ellas, 928 bien y 188 mal. Dificultad: 17%.

Tiempo medio de resolución: 29 segundos (25 en aciertos y 53 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 48% (91 sobre 188).

Comentarios:

Este problema, aparentemente sencillo, no lo es tanto para alumnos de 2º Pr. (7 u 8 años). Es posible que tener en el mismo texto, el número 4 y el concepto $\frac{1}{4}$ genere dificultades añadidas que expliquen la elevada dificultad del problema (17%).

La primera respuesta 16 (4×4) en vez de ($4 \times \frac{1}{4}$) nos indica que *cuarta parte* ha sido sustituida por su inverso, que es 4. Ya comentamos que sustituir los multiplicativos por partitivos y viceversa es bastante frecuente en este tipo de problemas.

En la segunda, 20 (4×5), parece que se ignora el cálculo de la parte solicitada y a cambio se responde con el producto de los 5 dedos de cada pie por el número de pies. Es otra posible respuesta: responder sobre lo que tu quieres en vez de sobre lo que te pide el problema. La tercera, 4, responde a la presión del dato numérico o a no saber muy bien lo que hacer con esa *cuarta parte*. La última, 8 (4×2) el error es confundir el partitivo *cuarta parte* con el multiplicativo *doble*.

1420. ¿Cuántos paquetes de sal de un cuarto de kg. haré con 32 kg. de sal?

(128 – 2:7 ‡ 32:14 ‡ 8:125)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 128 (32×4).

Número de veces ejecutado: 1031. De ellas, 817 bien y 214 mal. Dificultad: 21%.

Tiempo medio de resolución: 30 segundos (21 en aciertos y 66 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 77% (164 sobre 214).

Comentarios:

No intuimos los mecanismos mentales de la primera respuesta, 2.

En la segunda, 32, se trata de dar el último dato frente a la incomprensión de lo que se ha de hacer. Finalmente, en la respuesta 8 ($32 / 4$) se confunde $\frac{1}{4}$ con 4. Se llega a un resultado correcto tanto dividiendo 32 entre $\frac{1}{4}$ como multiplicando 32 por 4, pero no dividiendo 32 entre 4.

Las confusiones entre estos términos donde se ha de discernir entre ellos y las operaciones que representan, no son raras sobre todo en alumnos de los primeros ciclos de Primaria, ni excepcionales en el resto de Primaria e incluso la ESO.

942. En tres pasteles, ¿cuántos cuartos de pastel hay?

(12 – 0.75:11 ‡ 3:9 ‡ 4:6)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 12 (3×4 o $3 / (1/4)$).

Número de veces ejecutado: 935. De ellas, 851 bien y 84 mal. Dificultad: 9%.

Tiempo medio de resolución: 15 segundos (13 en aciertos y 42 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 31% (26 sobre 84).

Comentarios:

Se trata de pasar de unidades a cuartos.

En la primera respuesta, 0.75 ($3/4$), conlleva formalmente dos fallos. Primero, confundir *cuartos* o $\frac{1}{4}$ s con *cuatro* y segundo, dividir en vez de multiplicar por 4 los tres pasteles.

Dichos pasteles se pueden multiplicar por 4 o dividir por $\frac{1}{4}$. Lo que no se puede hacer es dividirlos por 4, porque ello es equivalente a confundir *cuarto* con *cuádruple*.

En la segunda, 3, vemos la presión del primer dato, aunque esta vez tenga constancia literal en vez de numérica.

En la tercera, la misma presión del último dato, si bien reconvertido erróneamente, es decir, tomando 4 como *cuarto*.

4.3.7.7. Otros: quinto, sexto... (31)

El comportamiento del resto de partitivos de uso frecuente (aunque menos) es parecido a lo que venimos comentando en los puntos anteriores.

Grosso modo, se mantiene el patrón de error (multiplicar en vez de dividir por el número indicado), aunque puedan aparecer otros errores adicionales en base al contexto u otros obstáculos del problema.

1295. ¿A cuánto equivale la séptima parte de 35?

(5 – 0.2:6 ‡ 245:21 ‡ 7:12)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 5 ($35 / 7$).

Número de veces ejecutado: 1280. De ellas, 1155 bien y 125 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 13 segundos (12 en aciertos y 25 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 31% (39 sobre 125).

Comentarios:

Tenemos 3 errores sistemáticos en este problema que utiliza el partitivo séptima parte, menos frecuente que los vistos hasta ahora.

En la primera respuesta, 0.2 ($7/35$), se confunde 7 con *séptima parte* y además de ello se utiliza ese 7 que debía ser divisor, como dividendo, lo que deja claro hasta dónde puede llegar la creatividad de los alumnos cuando no saben lo que hay que hacer.

En la segunda, 245 (35×7), se confunde *séptima parte* con su inverso 7, realizando la operación 35×7 en vez de $35 \times 1/7$ o $35 / 7$.

En la tercera, 7, se nos muestra el primer dato, si bien previamente ha sido reconvertido en su inverso.

2220. ¿Cuántos quintos de manzana obtendré con 16.2 manzanas?

(81 – 3:16 ≠ 3.24:76)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 81 (16.2×5 o $16.2 / (1/5)$).

Número de veces ejecutado: 915 De ellas, 776 bien y 139 mal. Dificultad: 15%.

Tiempo medio de resolución: 25 segundos (18 en aciertos y 65 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 66% (92 sobre 139).

Comentarios:

Se trata de pasar de unidades (aunque con decimales) a quintas partes.

Veamos las respuestas que son utilizadas como alternativa errónea a la correcta, es decir, en vez de multiplicar 16.2 por 5 o dividir 16.2 entre 1/5.

En la primera, 3, se dividen las manzanas por 5 (primer error) y se eliminan los decimales del resultado, aunque es muy posible que se calculase solo la parte entera.

En la segunda, 3.24 ($16.2 / 5$), se muestra una buena precisión calculatoria, al menos de la calculadora utilizada, sin poder concluir que hubiera ocurrido si esos alumnos hubieran tenido que realizar la división con lápiz y papel. Lo que queda bastante patente es que no se ha adaptado al contexto, ni dónde, ni cómo aplicar el concepto quintos en el texto propuesto, que en este caso no pasa por dividir las manzanas enteras por 5 sino por multiplicarlas.**4.3.8. Sistema Métrico y Decimal (Smd.332)**

En el último subapartado de los errores sistemáticos incluiremos el sistema de medidas, de base 10, fundamentalmente las referidas a longitud, peso y volumen y los fallos en la utilización del sistema numérico decimal en el que cada cifra de cualquier cantidad cuenta con dos valores, uno absoluto —que puede tomar 10 variaciones (de 0 a 9) y otro relativo (que depende su posición relativa dentro del número)—. La síntesis de ambos nos da el ajuste correcto en la cantidad, y su ausencia el uso erróneo del sistema de numeración decimal.

Moverse bien por sistema numérico exige una alta familiaridad con conceptos como decena, centena, millar, etc. (múltiplos de la unidad), y lo que es más importante diferenciarlos perfectamente de los divisores (décima, centésima, milésima, etc.).

Los problemas de este apartado no surgen, debido a su dificultad con respecto a otras categorías tratadas, hasta el tercer curso de la enseñanza Primaria, sensiblemente más tarde. Aún así los errores encontrados son bastante persistentes y no acaban de desaparecer totalmente a lo largo de toda la enseñanza obligatoria, que incluye Primaria y Secundaria Obligatoria.

Tenemos además una dificultad añadida a este sistema numérico completo y complejo de elaboración de cantidades que es el uso correcto de la coma, que tangencialmente puede ser confundido con el punto como separador de tres cifras (miles, millones...). Recordemos que tradicionalmente el

mundo hispanohablante ha utilizado la coma decimal y el punto como separador frente al mundo sajón, que utiliza la coma como separadora y el punto como decimal. Como tantas otras veces, se va imponiendo la simbología sajona y, gracias a la profusión de aparatos electrónicos de todo tipo, cada vez es más frecuente ver y utilizar el punto decimal.

A modo de anécdota, y por si todo este lío fuera poco para nuestros alumnos, que tardan poco en distraerse... si es que estaban en la fase de atención, billón (*billion* en inglés) significa para nosotros un millón de millones (un 1 y 12 ceros) y para el mundo sajón mil veces menos (un 1 y 9 ceros), es decir, mil millones.

4.3.8.1. Longitud (43)

Los problemas relacionados con la Longitud aparecen en los cursos medios de la enseñanza Primaria, 3º y sobre todo 4º, que es el momento en que dichos contenidos aparecen en los currículos del área matemática.

Supongo que los énfasis en la enseñanza/aprendizaje del sistema métrico es menor del que debiera para asegurar su conocimiento ya en el tramo obligatorio de Primaria. De hecho no son raros los casos de alumnos en la secundaria obligatoria con problemas serios en el manejo del sistema de medidas.

Para no resultar reiterativos en estas observaciones hemos de decir que los aspectos comentados para la **longitud**, con ligeras variaciones, son extensibles al **peso** y **volumen**.

1973. ¿Cuántos centímetros son 7 milímetros?

(0.7 – 0.007:8 ÷ 0.07:14 ÷ 7:7 ÷ 70:39)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 0.7 (7/10).

Número de veces ejecutado: 956. De ellas, 839 bien y 117 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 19 segundos (15 en aciertos y 49 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 58% (68 sobre 117).

Comentarios:

Son varias las respuestas que tenemos para el cambio de medidas propuesto en este problema. Las dos primeras reflejan desconocimiento de la distancia entre los centímetros y milímetros en la ordenación de las medidas de longitud y los correspondientes errores asociados a dicho desconocimiento. Se mantiene, no obstante, la operación a realizar, la división, que permite transformar medidas menores en otras mayores. La tercera, 7, es la presión del único dato o la inhibición de operar por desconocimiento de cómo hacerlo.

La última, 70, que es la que aporta mayor número de errores, a diferencia de las dos primeras, muestra una confusión en la operación (multiplicar en vez de dividir) aunque se mantiene la cantidad (la unidad seguida de tantos de ceros como se distancien las medidas) con las que operar.

2084. Corto 2.75 dam. de cuerda en trozos de 0.25 dm. ¿Cuántos trozos haré?

(1100 – 11:83 ± 12:6)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 1100 ($2.57 \times 100 / 0.25$).

Número de veces ejecutado: 902. De ellas, 751 bien y 151 mal. Dificultad: 17%.

Tiempo medio de resolución: 29 segundos (14 en aciertos y 103 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 59 (89 sobre 151).

Comentarios:

Este problema muestra un elevado índice de dificultad (17%) y un elevado porcentaje de errores sistemáticos sobre el total de ellos (59%).

La primera respuesta es 11 ($2.75 / 0.25$) e ignora la transformación de un tipo de medidas en otras, pasar de dam en dm, es decir, igualar los decímetros a los decímetros.

La mayor parte de los errores de la respuesta 11 (83 veces) es muy superior a la frecuencia de la segunda respuesta, 12, para la cual no tenemos ningún mecanismo de elaboración explicativo de la respuesta.

3051. Un palo mide 0.3 cm. ¿Cuántos mm. mide ese palo?

(3 – 30:14)

Observaciones:

Curso: 6º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 3 (0.3×10).

Número de veces ejecutado: 811. De ellas, 750 bien y 61 mal. Dificultad: 8%.

Tiempo medio de resolución: 9 segundos (8 en aciertos y 19 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 23% (14 sobre 61).

Comentarios:

Este problema dirigido a alumnos de final de 6º de Primaria (edad de 11 a 12 años), nos muestra serias dificultades para pasar de cm. a mm. tras 6 años de escolaridad obligatoria.

Casi 1 de cada 10 alumnos de esta edad y/o curso, comete fallos al intentar realizar dicho cambio de medidas, o bien, fallos al operar, multiplicar en este caso, con decimales.

4.3.8.2. Peso (14)

En el caso de la magnitud **peso**, las medidas seguramente son menos utilizadas si exceptuamos el kilogramo que vulgarmente lo conocemos como kilo. Es el uso el que ha cambiado el significado del vocablo que ha pasado de ser equivalente a 1000 unidades de algo a ser 1000 gramos.

Por otra parte el gramo, que es la medida de referencia para todas las demás, es demasiado pequeña y bastante poco usada en general. Basta con comparar los usos de las medidas de longitud, cm. o mm., por ejemplo, como cg. y mg., de peso, para ver el contraste.

2431. ¿Cuántas cajas de azúcar de kg. puedo llenar con 30 mag. y 10 kg. de azúcar?

(310 – 10:8 ≠ 10.3:7 ≠ 40:9)

Observaciones:

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 310 ($30 \times 10 + 10$).

Número de veces ejecutado: 847. De ellas, 748 bien y 99 mal. Dificultad: 12%.

Tiempo medio de resolución: 21 segundos (14 en aciertos y 74 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 24% (24 sobre 99).

Comentarios:

Este problema plantea una suma de medidas de peso no homogéneas que exigen un paso previo, el cambio de miriagramos a kilogramos y así poder operar cantidades semejantes.

La transformación correcta de mag. a kg. requiere conocer ambos términos, saber cuál es mayor y cuál menor, lo que nos dará la operación a utilizar, y conocer el número de pasos que distancia ambos, lo que nos dará la cantidad por la que hemos de operar.

La primera respuesta, 10, es fácil que sea la del último número que aparece en el problema.

En la segunda, $10.3 (10 + (30/100))$ parece que hay un fallo en el paso de mag. a kg. lo que refleja el desconocimiento de mag. y/o kg. Primero por dividir en vez de multiplicar y segundo por dar dos saltos ($100 = 10 \times 10$) en vez de uno.

La tercera, $40 (30 + 10)$, es la suma de las cantidades directas, heterogéneas, no semejantes, sin ningún tipo de transformación. Se trata de un error mucho menos evolucionado que el de la respuesta anterior que asumía algún tipo de cambios, aunque sin acertar cuál era el correcto.

2598. Tengo 12 kg. de sal y gasto cada día 125 g. ¿Cuántos días me durará?

(96 – 9:7 ≠ 9.6:8)

Observaciones:

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 96 ($12 \times 1000/125$).

Número de veces ejecutado: 771. De ellas, 667 bien y 84 mal. Dificultad: 11%.

Tiempo medio de resolución: 27 segundos (22 en aciertos y 68 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 18% (15 sobre 84).

Comentarios:

Seguramente las medidas más cotidianas, oídas y usadas de la magnitud peso sean las de gramo y kilogramo, las referidas en el presente problema.

Pero parece ser que ello no las hace más conocidas ni mejor utilizadas.

Ambos fallos (9 y 9.6) comparten del mismo error de multiplicar por 100 en vez de por 1000 para pasar de kg a gr. ($12 \times 100 / 125$) y se diferencian en que en el primer caso se ignora el decimal del divisor mientras en el segundo está presente.

Pensamos que desconocer la transformación de kilos a gramos en el último ciclo de Primaria es otra muestra que no hace sino incidir en el deterioro de los aprendizajes matemáticos básicos de la enseñanza obligatoria.

2697. ¿Cuántos medios kg. hay en 1030 dag?

(20.6 – 20.7 ‡ 206.6 ‡ 5.15:11)

Observaciones:

Curso: 5º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 20.6 $((1030/100) \times 2)$.

Número de veces ejecutado: 815. De ellas, 731 bien y 84 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 15 segundos (9 en aciertos y 71 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 29% (24 sobre 84).

Comentarios:

En el presente problema se plantea un cambio de medidas de peso que se complementa con el uso del concepto medio y los errores sistemáticos plantean los siguientes escenarios: 20:7, 206:6, 5.15:

Respuesta 20. $((1030 / 100) \times 2)$ cuyo error es la falta del decimal, que puede estar omitido al tomar el entero pero no el decimal al dividir $1030 / 100$. Es decir, el error está en realizar el cálculo de esta manera: $[1030 / 100 = 10; 10 \times 2 = 20]$ en vez de esta: $[1030 / 100 = 10.3; 10.3 \times 2 = 20.6]$.

Respuesta 206 $((1030 / 10) \times 2)$, donde se produce el error en el cambio entre decagramos y kilogramos.

Respuesta 5.15 $(1030 / 100 / 2)$, donde el fallo no se produce en el cambio de medidas sino en la aplicación del concepto medio, calculando la mitad de la cantidad (dividiendo por dos) en vez de calcular el número de mitades (multiplicando por dos).

Hemos de señalar, lo cuál es válido para otras muchas situaciones, que las dificultades adicionales que puedan aparecer en un problema (como en este caso transformaciones de medidas a las que se pueden añadir y otros conceptos dificultosos, como mitad o triple....) no se traducen en un incremento proporcional en la dificultad del problema.

Es como si, y remarco el como si, la falta de madurez o de motivación de los alumnos frente al problema adquiriera más protagonismo dentro del error que esos obstáculos puntuales adicionales con los que solemos condimentar algunos de nuestros textos.

Observamos tan solo ligeros efectos acumulativos, en ningún caso sistemáticos, por las trabas adicionales o complementarias en los textos, de lo que podemos deducir que la falta de madurez en RP no es de tipo sistémico o global sino que más bien se va esparciendo de forma puntual a través de distintos errores, en diferentes dificultades, y que solo excepcionalmente puede tener un comportamiento acumulativo.

No necesariamente todos los alumnos que fallan lo fallan todo, y tampoco los obstáculos acumulados diseñados en los textos siguen una lógica bayesiana.

4.3.8.3. Volumen (19)

Respecto al **volumen** hemos de reiterar lo que comentamos en el anterior apartado referido a **peso**. El litro como medida central de volumen posee un amplio empleo, en parte, porque el resto de medidas de la categoría carecen de él. Es como si todas las demás actuaran a modo de meras comparsas, secundarias y sin verdadero empuje. Además hemos de recordar el solapamiento que existe entre estas medidas y las cúbicas, que también restan protagonismo a las de volumen (litro = dm³, mililitro = cm³, kilolitro = m³).

2151. ¿Cuántos vasos de 0.25 litros necesito para llenar un recipiente de 2.5 decalitros? (100 – 1:8 ≠ 25:6)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Larga.

Respuesta correcta: 100 ($2.5 \times 10 / 0.25$).

Número de veces ejecutado: 885. De ellas, 757 bien y 128 mal. Dificultad: 14%.

Tiempo medio de resolución: 22 segundos (13 en aciertos y 79 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 11% (14 sobre 128).

Comentarios:

Se trata de un problema con una dificultad más bien alta, teniendo en cuenta la edad/curso de los destinatarios originarios (4º de Primaria, 9 o 10 años), y ello porque se juntan dos dificultades: la primera relativa a la transformación de litros a decalitros y la segunda, la de transformar a **llenar** (repartir) la correspondiente operación (¿dividir o multiplicar?).

La primera respuesta, 1 ($0.25 / 2.5$ o $2.5 / 0.25$), significa que, la primera cantidad y la segunda son iguales, es decir, se ha prescindido de la coma (o punto) como separador decimal, lo que nos remite a una laguna previa muy anterior a un desconocimiento que ya debía estar muy superado que imposibilita la posterior comprensión del SMD. La segunda, 25, pudiera tener en común con la primera el mismo tipo de desconocimiento que lleva a ignorar la relevancia decimal y la existencia del 0 a la izquierda seguido de coma (o punto). Aparecen dos veces un 2 y otras dos un 5. Es como si se dijera *vamos a poner 25 a ver si acertamos porque es lo que se repite*.

2280. ¿Cuántos litros hay en 12 botellas de 7.5 dl. cada una? (9 – 90:10 ≠ 900:17)

Observaciones:

Curso: 4º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 9 ($12 \times 7.5 / 10$).

Número de veces ejecutado: 687. De ellas, 620 bien y 67 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 17 segundos (14 en aciertos y 46 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 25% (27 sobre 67).

Comentarios:

Los errores sistemáticos que se plantean en las respuestas de este problema respetan la operación a utilizar (el producto), pero muestran fallos relacionados con la transformación de decalitros a litros, con el uso del SMD. En la primera, 90 (12×7.5), se ignora la presencia de litros y dl. En la segunda, 900 ($12 \times 7.5 \times 10$) parece como si la coma del 7.5 se transformara de alguna manera en *multiplicar por 10 o bien se confundiera dl. con dal, o decilitros con decalitros*.

3079. ¿Cuántos cl. contiene una botella de 2 litros?/

(200 – 20:13 ÷ 2000:6)

Observaciones:

Curso: 6º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 200 (2×100).

Número de veces ejecutado: 753. De ellas, 681 bien y 72 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 15 segundos (12 en aciertos y 40 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 26% (19 sobre 72).

Comentarios:

El cambio de litros a centilitros sigue dando problemas en 1 de cada 10 alumnos del último curso de Primaria (11-12 años).

No se trata de un problema difícil si se conoce la terminología del SMD, lo que nos indica que una parte no despreciable de la población infantil de Primaria acaba el ciclo de 6 años de enseñanza obligatoria sin conocer lo que es un centilitro. Y en ausencia de discernimiento o distinción de conceptos, se puede multiplicar, dividir, por 10, por 100 o por 1000, probando, por suerte, lo ausente por conocimiento. Tanto vale para la respuesta 20 como para la respuesta 2000.

4.3.8.4. Sistema numérico decimal (256)

Un punto aparte merece, según pensamos, el tratamiento del sistema de numeración de forma separada del sistema de medidas (**longitud, peso y volumen** vistos en los puntos anteriores), que si bien comparte con él la base decimal (millares, centenas, decenas, unidades, décimas, centésimas, milésimas –numeración– kilo, hecto, deca, unidad, deci, centi, mili –medidas–), tiene unas connotaciones diferentes que afectan a la totalidad del sistema de numeración y que tantos problemas causa en la lectura, escritura, y operatoria de las cantidades.

No están comprendidos ni la lógica ni el funcionamiento del sistema de numeración decimal, al menos en su totalidad.

Falla el conocimiento exacto de los términos, la diferenciación entre los términos cifra y número, a veces hay confusiones entre múltiplos y divisores de la unidad, el manejo de la coma, el valor relativo de las cifras según su posición, la colocación de cantidades con correspondencia de las cifras (unidades bajo unidades, decenas con decenas...) en suma y resta, etc, etc.

732. En una caja hay 300 chinchetas. ¿Cuántas centenas son?

(3 – 100:13 ‡ 30:22 ‡ 300:13)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Media.

Respuesta correcta: 3 (300/100).

Número de veces ejecutado: 954. De ellas, 860 bien y 94 mal. Dificultad: 10%.

Tiempo medio de resolución: 36 segundos (29 en aciertos y 78 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 19% (48 sobre 94).

Comentarios:

Tenemos en este problema tres respuestas que nos marcan algunos de los errores que se cometen en la conversión de unidades a centenas en alumnos de primer ciclo de Primaria.

La primera respuesta, 100, es el número de unidades que hay en una centena, lo que es cierto, pero no responde a la preguntas que se hace.

En la segunda, 30 (300 / 10), tenemos una confusión entre los conceptos *centena* y *decena*.

En la tercera, 300, se responde con el último dato presentado en el texto. Ya hemos comentado que la presión del primer o último dato suele aparecer de forma paralela a como lo hace la falta de comprensión del problema o el desconocimiento de lo que se ha de hacer para calcular la respuesta.

912. ¿Qué número de dos cifras se escribe con dos 6?

(66 – 12:10 ≠ 3:15)

Observaciones:

Curso: 2º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 66 (66).

Número de veces ejecutado: 1220. De ellas, 1122 bien y 98 mal. Dificultad: 8%.

Tiempo medio de resolución: 15 segundos (14 en aciertos y 25 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 25% (25 sobre 98).

Comentarios:

El texto pide la elaboración de un número de dos cifras, tarea muy simple y sencilla, y las respuestas de cerca de casi uno de cada diez alumnos están referidas a distintas operaciones entre los datos que proporciona el texto.

En el primer caso, $12 (6 \times 2)$, multiplicándolos, y en el segundo, $3 (6 / 2)$, dividiéndolos. Nada que ver con lo solicitado.

1359. Tengo 13 centenas de cromos. ¿A cuántos cromos equivalen las 13 centenas?

(1300 – 13:23 ≠ 130:80 ≠ 156:6)

Observaciones:

Curso: 3º Primaria.

Longitud del texto: Corta.

Respuesta correcta: 1300 (13×100).

Número de veces ejecutado: 1006. De ellas, 859 bien y 147 mal. Dificultad: 15%.

Tiempo medio de resolución: 20 segundos (17 en aciertos y 37 en fallos).

Errores sistemáticos sobre el total de errores: 74% (109 sobre 147).

Comentarios:

Se trata de una transformación de centenas a unidades utilizando un confusor que consiste en mostrar dos veces el mismo dato, es decir una redundancia, que debería ser ignorada.

La respuesta, 13, figura dos veces en el texto y cuya insistencia seguramente esté relacionada con lo contestado.

En la segunda, $130 (13 \times 10)$, se ha tomado la centena con la decena, siendo 10 veces menor.

En la tercera, $156 (13 \times 12)$ se ha confundido centena con docena, de lo que deducimos otro error encubierto, el de *decena* y *docena*, por cierto muy habitual y del que ya hemos hablado en el punto 4.3.2.1. Conceptos cotidianos.

5. Recapitulación

A modo de resumen y síntesis, haremos un recorrido explicativo de la evolución que ha ido teniendo *winmates* desde sus inicios: las motivaciones originales y las posteriores que han ido surgiendo, distintas épocas y fases que se han ido sucediendo, la evolución de las plataformas y el software que hemos ido utilizando, las etapas evolutivas que han constituido la muestra de alumnos que han participado, la acumulación de los trabajos individuales, esfuerzo y dedicación que se han aportando a lo largo de los años... y las observaciones y conclusiones a las que hemos ido llegando.

Si este trabajo puede servir para reforzar aprendizajes que consideramos fundamentales en la enseñanza obligatoria, matemática básica, cálculo, resolución de problemas, lectura comprensiva de textos, etc, si puede ser utilizado a modo de complemento de las clases presenciales que se están viendo alteradas de forma significativa durante los últimos tiempos de confinamiento y pandemia, si facilita la no siempre fácil labor de aprendizaje a profesores, padres y alumnos, ahí está. Ahí están las conjeturas, ejemplos, explicaciones, alcance y límite de nuestras reflexiones por si pueden ser de utilidad.

5.1 Nuestra pretensión

El eje troncal del presente trabajo es **winmates**, cuyo nombre hizo referencia desde sus inicios a dos conceptos base: **win** (de Windows) y **mates** (problemas de matemáticas).

La pretensión era aprovechar el empuje de la tecnología informática, de Windows, a la enseñanza y aprendizaje de una de la materias más arduas y dificultosas del currículo obligatorio de la enseñanza, (las matemáticas, a lo largo de la etapa de 6 a 16 años), y dentro de ellas a la **Resolución de Problemas**, que ya hace años apuntaba serias deficiencias de aprendizaje.

Pretendíamos dicha modernización para agilizar la puesta en práctica de los contenidos abstractos más básicos, tiernos y primarios (de Primaria) y llevarlos al terreno de lo concreto. Intentábamos dar visibilidad a una conexión entre lo que se iba aprendiendo y para qué valía en la vida cotidiana, ir construyendo un puente entre teoría (ideas, operaciones, propiedades, método, etc) y praxis (para qué sirve, para qué es útil, para qué lo puedo necesitar, etc), ayudando a complementar el proceso del por qué y para qué de las matemáticas. La RP puede acercar lo cotidiano a las matemáticas desde edades muy tempranas.

Las matemáticas, pienso, bien pudieran jugar un papel importante en una especie de consolidación del principio de realidad, medible y contable, que cada vez aparece más difuminado por la evolución que va tomando la sociedad actual, presionada por la inmediatez de la imagen, del eslogan y del tuit que pueden llegar a dificultar seriamente el pensamiento, al menos como proceso lento, pausado y deductivo de aproximación a como funciona el mundo o lo que él sabemos.

5.2 Las colecciones de problemas

Poco a poco se fueron elaborando colecciones de problemas más amplias que intentaban ir cubriendo progresivamente la mayor parte de los temas específicos de los currículos de la enseñanza obligatoria.

De forma puntual, cuando observábamos que la dificultad de uno o varios problemas era muy elevada para una determinada edad, generábamos problemas similares pero con variantes añadidas (conceptuales, de mecánica operatoria, de longitud del texto, distractores, etc) que, tras verificar su comportamiento, validación y viabilidad, pasaban a formar parte de las nuevas colecciones, que se iban agrandando con nuevos problemas en los flancos más endebles o débiles. Dentro de todos los campos o puntos de información de las colecciones de problemas, algunos de ellos estaban destinados a contar las veces que el problema era fallado o acertado.

Igualmente se controlaban los tiempos que el alumno había necesitado para su resolución, tanto si la respuesta era un acierto como si era un error.

Ello nos permitía valorar la dificultad del problema en base a los datos empíricos que recibía a través de la respuesta y tal dificultad podía variar, de hecho, la asignación original del curso al que iba destinado el problema, incrementándose (si la dificultad era muy alta) o rebajándola (si era muy baja).

Ese dinamismo activo en la tabla de problemas generaba un movimiento vertical de los mismos según la dificultad con que se iban topando, y nos permitía analizar los pormenores de dicho movimiento, etc, etc.

Las respuestas de los alumnos reflejaban comportamientos, destrezas, errores, obstáculos, estrategias cognitivas, tiempos de dedicación, etc. que nos han sido muy útiles en este trabajo. También desgana, pasotismo y ruido en forma de respuestas basura que hemos tenido que ir eliminando poco a poco a través de distintos tipos de filtros. La tabla original, punto de partida de nuestro trabajo, consta de 6000 problemas repartidos, al menos teóricamente, en 10 bloques de 600, es decir 600 problemas para cada uno de los 10 cursos de enseñanza obligatoria (Primaria y ESO).

Partiendo de esa base de 6000 problemas, sobre la que ha trabajado winmates, se hizo una laboriosa tarea de extracción. Fueron depurados y eliminados aquellos problemas cuyas respuestas incluían altas dosis de información redundante, irrelevancia o basura.

De esta forma, se han rechazado más de la mitad de ellos, quedando nuestra nueva base de análisis reducida a 2486 problemas. Y esta colección reducida será el punto de partida de nuestro trabajo, nuestras observaciones, comentarios y conclusiones.

5.3 La obtención de datos

La breve evolución del software y BBDD que hemos ido utilizando a través del tiempo, intentando irnos adaptando a los cambios rápidos y a veces vertiginosos del hardware y consecuentemente del software, ha sido el siguiente: (Basic, dBase, Clipper, Visual Basic, Php-HTML/MySQL). Se puede ver esta evolución de forma más detallada en el punto **2.2. El software utilizado**.

Desde su puesta en marcha a través de Internet, se disparó el uso de **winmates** en general y también de forma particular, es decir, las opciones de resolución de problemas. España, en primer lugar, pero también en México, Chile, Perú, Venezuela, Argentina y el resto de países hispanohablantes, incluyendo EE.UU., con más hablantes de español que España. Ha habido una fuerte presencia de **winmates** en diferentes periodos a lo largo de estas tres últimas décadas. Incluso he podido ir siguiendo, de forma minoritaria pero regular por ciertos periodos de tiempo, el uso de **winmates** en países no hispanohablantes dentro de Europa y África y de otros a veces muy alejados cultural y geográficamente del nuestro como Rusia, China, Japón, Filipinas, etc). Creo que mayoritariamente se trata de casos de familias con niños en edad escolar desplazados temporalmente por cuestiones de trabajo, de promoción, etc. y para los que **winmates** es un instrumento aceptable para el aprendizaje o refuerzo de competencias matemáticas básicas.

Como vemos, los datos que **winmates** nos ha proporcionado tienen orígenes y contextos bastante diversos. Una parte de ellos, la mayoría, se han producido en entornos controlados de aula, donde el grupo clase trabaja repartido en equipos (lo más frecuente de dos alumnos, pero sin descartar 3 o 1 sólo) asociados cada uno a un ordenador.

Otra buena parte de los datos provienen del trabajo realizado de forma individual, realizado en el entorno familiar, normalmente en casa, con o sin control directo o diferido por parte del adulto, que normalmente suele ser el padre o la madre. Se trata de casos en los que la familia es consciente de las bondades de este trabajo para el refuerzo de competencias matemáticas básicas.

Hemos de citar también el uso que se ha hecho de **winmates** como parte regulada de los tradicionales deberes escolares o tareas a realizar fuera del colegio. Estas tareas suelen tener más un carácter más orientativo que obligatorio, que comparativamente no han tenido tanta frecuencia pero que en modo alguno son despreciables. Y finalmente, citar que la vía de acceso a la RP de **winmates** ha sido doble.

La primera, más fiable, eficiente y satisfactoria de cara a optimizar el aprendizaje, a través del registro o alta en **winmates**. Dicha alta, que consiste en la resolución de 30 problemas ordenados por dificultad creciente, se

interrumpe con el fallo consecutivo de cuatro problemas, nos da un nivel de maduración del alumno en competencias matemáticas (conceptos, operativa, etc.) que será proyectado para situar el comienzo del trabajo del alumno (puntero) en la base de 6000 problemas. el que debe comenzar a trabajar. Puede aportar grandes diferencias individuales en el intragrupo de edad que deben ser tenidas en cuenta el trabajo planificado de RP.

La segunda, situar de forma automática el esfuerzo y nivel del trabajo posterior del alumno a partir fundamentalmente por su nivel madurativo. Es decir 10 niveles para 10 cursos, como si todos fuesen mental y madurativamente iguales o muy parecidos, como si las competencias fueran una función lineal de la edad y solo de ella, como si no existiesen distinciones por contexto, inteligencia o motivación, como si no hubiesen otras diferencias individuales, como si la fecha de nacimiento fuera la única variable relevante en el aprendizaje. Es cierto que esta segunda opción es más directa que la asignación de la dificultad por edad es más rápida que realizar el registro y un diagnóstico, que además requiere estar bien hecho, pero lo ganado en inmediatez de la segunda, lo perdemos en la precisión (valoración del nivel de partida), la diferenciación (no todos evolucionan al mismo ritmo), la continuidad el trabajo (seguir el día siguiente donde acabó el día anterior) y el seguimiento (ver la evolución del trabajo a lo largo de los días (problemas fallados sobre los que volver, análisis de tiempos, etc).

5.4 Nos interesan más los errores

Nos interesan los errores, no los aciertos. No analizamos el rastro ni los comportamientos en la elaboración de las respuestas acertadas. Las damos todas por igualmente válidas aunque existan importantes diferencias intragrupo en la eficiencia (tiempo de respuesta) que reflejan las importantes diferencias individuales de los alumnos.

Nos interesa analizar los obstáculos con los que se encuentra una parte relevante de la población de estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas a través de la RP. La fortaleza, la consistencia y la extensión de esos obstáculos nos aporta información de interés sobre la endeblez y estabilidad de las formas de aprendizaje o enseñanza y de los procesos de pensamiento o formas de procesamiento erráticas que tienen lugar dentro de las mentes de nuestros alumnos cuando se enfrentan a un problema.

No nos interesan los aciertos, sino los errores. Y tampoco todos los errores, sino aquellos que presentan una cierta sistematicidad, una cierta solidez, una cierta coherencia y una cierta recurrencia. Es decir, hemos elegido aquellos problemas con errores que hemos denominado sistemáticos, porque presentan un mínimo de repetibilidad (frecuencia mayor o igual a 6), una cierta lógica interna (que nos suele dar pistas sobre trayectorias argumentales o esquemas de pensamiento) y una recurrencia que va más allá de una casuística individual y de la casualidad.

Por eso hemos descartado tanto los problemas mayoritariamente acertados como aquellos que han sido excesiva y proporcionalmente muy fallados o aquellos otros cuyas respuestas podrían ser consideradas o incluidas dentro del mismo patrón de aleatoriedad y/o basura. Ninguno de esos tres tipos de problemas nos aportan información relevante para las pretensiones de nuestro trabajo.

Los errores sistemáticos, nuestro objeto de estudio, estará formado por los errores cometidos por distintos alumnos que emiten idéntica respuesta errónea ante el mismo problema. Esta situación, excluidos los casos de poca frecuencia repetitiva, puede aportar información de interés sobre las decisiones resolutorias de los alumnos y, lo que es más importante, sobre los procesos de pensamiento de los alumnos en la RP.

5.5 Usuarios y destinatarios

Nuestra idea es presentar los resultados de este trabajo a dos tipos básicos de destinatarios.

Por una parte tenemos los alumnos que serán los receptores naturales de las colecciones de problemas ordenados por dificultad y que pueden servir de refuerzo, afianzamiento, complementariedad a los aprendizajes reglados en los currículos de las enseñanzas matemáticas del periodo de los 6 a los 16 años, es decir Primaria, primeros cursos de la ESO y 3° y 4° de ESO de alumnos con deficiencias habituales de aprendizaje matemático. Todo ello está disponible en **winmates**.

Por otra, y en segundo lugar, también son destinatarios de nuestro trabajo el personal adulto, de edad superior a la población infantil a que va dirigido, pero que, desde una escolaridad obligatoria inexistente o insuficiente, ven en **winmates** posibilidades para aprender o actualizar determinadas competencias y destrezas dentro el área matemática. Y a estos alumnos adultos, hemos de añadir los adultos responsables de los alumnos usuarios de **winmates**, que básicamente son de dos tipos: padres y profesores.

Para ambos tipos de tutores, padres y profesores, puede ser útil la recopilación de las muchas situaciones que hemos mostrado en el punto **4. Análisis de datos** del presente trabajo. Esos problemas con esos errores sistemáticos junto con las explicaciones que sobre ellos vamos dando pretenden sobrepasar una casuística aislada de la que nada podemos decir, excepto que sea puntualmente.

No. Con nuestras interpretaciones y conjeturas pretendemos dibujar patrones de comportamiento mental que superen el caso concreto y que permitan explicar cuál es el basamento de dichos patrones erráticos. Enumerarlos, describirlos y dibujarlos al desnudo puede ser de gran utilidad para ayudar a los padres y los profesores a mejorar los aprendizajes matemáticos básicos de sus hijos y/o de sus alumnos.

5.6 Categorías de problemas y de respuesta

La muestra de problemas seleccionada es muy amplia y es por ello que hemos mostrado una primera categorización de esos 2486 textos para intentar explicaciones e interpretaciones que vayan más allá del caso concreto.

Nueve categorías de **Problema** que engloban la totalidad: desde aquellos cuya resolución requiere más comprensión lectora que operaciones hasta ecuaciones, pasando por Geometría o Sistema Métrico Decimal. No siempre ha sido fácil la asignación de un problema a una categoría, y solo una, cuando puede pertenecer a varias de ellas, por ejemplo un problema de Geometría que requiere cambio de dm. a cm, trabajar con múltiplos que por definición exigen productos como operaciones, etc. Todo ello, junto con la justificación de las decisiones tomadas puede verse en el punto **2.4 La muestra** y en la tabla **H03**, sobre las categorías, y **H04**, que incluye las subcategorías de cada una de ellas, en el mismo apartado.

Pero una cosa son los tipos de problema tal como hemos comentado previamente y otra los tipos de respuesta dada por los alumnos a esos mismos problemas. Solamente de forma puntual coinciden los nombres de las categorías del problema y de las respuestas. No nos sirve para las respuestas la categoría a la que pertenece el problema, y menos aún las subcategorías.

Podemos ver más claro lo que trato de explicar a través del siguiente caso. Tenemos un problema que se resuelve a través de una resta (Categoría del problema: 12: Opbas resta (Operación básica, resta). Aparecen para él, pongamos, tres tipos de respuesta:

La primera, en la que el alumno ha sumado los datos en vez de restarlos: fou1 (fallo en operación utilizada, + en vez de -).

La segunda, donde el alumno ha restado, pero ha fallado al no añadir la que se llevaba de la cifra previa: eob2 (errores en operaciones básicas, resta).

La tercera, una respuesta inexplicable, excepto porque coincide con el primer dato del problema: dis4 (distractores, presión del primer dato).

Las codificaciones de toda la casuística de categorías y subcategorías de las respuestas dadas por los alumnos la podemos ver detalladamente en el apartado **3.3. Categorización de respuestas** y en la tabla **H12** adjunta en el **Anexo 6.2 de Cuadros y tablas**.

5.7 Límites y alcance

Obviamente, las características de la obtención de datos a través de Internet: en decenas de países distintos con sistemas educativos diferentes, con variabilidad sobre el control adulto y/o la práctica en lugares estándar como el aula escolar o la casa, etc, nos hacen ser humildes a la hora de presentar estas observaciones como aseveraciones consumadas deducidas a través de la aplicación nítida y rigurosa metodología científica.

No ha habido control de variables, ciertamente, tampoco abundancia de aparato estadístico comprobando significatividades ni diferencias, pero todo ello, esperamos, no haya invalidado un trabajo minucioso, acariciado y sostenido a lo largo de 30 años.

La trabajosa tarea clasificatoria tanto de los problemas como de las respuestas que ellos reciben persigue salir del corsé de la casuística concreta de un enunciado y dar alguna proyección a ciertos mecanismos comunes con que actúan los alumnos, algunos alumnos, ante estímulos análogos desde el punto de vista operacional o conceptual presentados expresamente a través de la gran variedad de situaciones y enunciados.

Nuestras observaciones no pretenden dar explicaciones pretenciosamente holísticas y categóricas sobre la Resolución de Problemas en el tramo escolar estudiado.

Pretendemos, humildemente, señalar ciertos aspectos que pueden servir de punto de vista para ayudar a desenmarañar la problemática que envuelve la RP. Nuestras conclusiones son una especie de aseveraciones parciales, es decir, de observaciones y anotaciones que se verifican en una parte no despreciable de los alumnos que han participado en este trabajo, e incluso, a veces, en una parte significativa y mayoritaria de ellos.

Podríamos hablar, en este sentido, de líneas de tendencia con los marcadores que indican los obstáculos que se han de solventar a lo largo de todo el recorrido de 10 años en los que tiene lugar el proceso de aprendizaje resolutorio.

No se trata de hacer generalizaciones sino apuntes matizados sobre comportamientos o mecanismos de respuesta frecuentes frente a algunas dificultades de RP relevantes para edades y niveles de maduración concretos. Nada más, ni nada menos.

5.8 Conclusiones

Una buena parte del tiempo invertido en este trabajo ha sido dedicado a establecer una tipología de los problemas de la muestra y otra el análisis de las respuestas dadas por los alumnos.

Es cierto que cada problema es distinto de los demás, que tanto sus datos como su envoltorio contextual presentan matices y rasgos diferentes, etc, etc, pero también lo es que muchos de ellos presentan analogías en sus enunciados, una cierta constancia de algunos inductores de errores (que podrán ser solventados o no), algunas similitudes en los mecanismos utilizados para el procesamiento del texto y la obtención de las correspondientes respuestas y el uso de un rango limitado de operaciones que exige, a veces, niveles elevados de comprensión, pericia, y precisión.

Tras ello late la idea de superar y desbordar la especificidad de un problema o texto concreto y abordar un cierto nivel de generalización de resultados.

Trabajar con muchos problemas de distintos tipos, resueltos por miles de alumnos que han dedicado miles de horas y producido miles de respuestas, también categorizadas, nos permite ver o intuir ciertas pautas o patrones en los fallos cometidos.

Las respuestas de errores no aleatorios que hemos obtenido, apartadas del ruido e información basura, son las huellas o pistas sobre los mecanismos de pensamiento que subyacen en la resolución de los problemas.

Ahí están los resultados, expresados más en forma de sugerencias que de hipótesis verificadas con comparación de medias, análisis de la variancia, campanas de Gauss, curtosis, ANOVAS o T de Student. Más bien, en forma de conjeturas o juicios contruidos laboriosamente a partir de indicios, de experiencia, de datos fragmentados y parciales, de premisas y de presupuestos. Esto es lo que ofrecemos.

En los apartados comprendidos entre **4.3.1.** a **4.3.8.** del punto anterior se van desmenuzando uno a uno todos los subapartados de que constan. En ellos se van dando pinceladas de trazo grueso, genéricas, para todo el subapartado de errores, que después serán tomados individualmente, con el foco más cerca, con la apreciación más nítida y los comentarios realizados individualmente. Los 116 problemas y cada uno de los errores sistemáticos con que aparecen, irán tomando un aspecto acumulativo en forma de observaciones cuya reiteración puede irse convirtiendo, o mejor dicho, tomando forma de conclusiones, que serán sintetizadas al final del presente apartado.

No renuncio a explicitar algunas implicaciones que, tomando como punto de partida los errores, puedan ser añadidas o enfatizadas en la enseñanza de las matemáticas. Se trata de sugerencias surgidas de la praxis, dentro del

aula, con o sin ordenadores, ampliables incluso al trabajo educativo en el entorno familiar. Sí, la formación de nuestros hijos es muy importante, y toda ayuda es poca. La web **winmates.net**, el punto de partida de este trabajo, sigue funcionando y esperando ser útil a todo aquel que la necesite.

Esperamos, con todas las reservas necesarias y las limitaciones de que hemos hablado, que el alcance de los comentarios a modo de conclusiones, puedan ser útiles para los segundos destinatarios, padres y profesores. En la medida que este deseo se cumpla, habrá merecido la pena el empeño de sintetizar 30 años de investigación sobre la Resolución de Problemas, sobre El error como el problema de los problemas.

5.8.1 Tiempo, dificultad y forma

Los alumnos registrados en **winmates** dedican un tiempo superior en la resolución de los problemas que los que trabajan en esta página web de manera, digamos, asistemática o coyuntural. No obstante, esta mayor dedicación de tiempo y esfuerzo en la tarea resolutoria no se traduce en tasas menores de error, sino que, paradójicamente, aumentan sus errores en una proporción en más del doble. Es decir, los alumnos registrados en **winmates**, con más control por la presencia física (en general) de un adulto (padre–madre o profesor) cometen más del doble de errores que los que trabajan, digamos, por libre, escogiendo ellos mismos el nivel, etc. y además utilizan bastante más tiempo en la resolución de los mismos.

Más dedicación de tiempo y esfuerzo y más elevada la tasa de errores. Aparentemente esto es contradictorio, pero no, no lo es. La explicación es que los primeros, los registrados, están resolviendo problemas bastante ajustados en dificultad a los niveles de maduración de los propios alumnos, mientras que en caso de los segundos, los no registrados, que eligen ellos mismos (o los padres o profesores) el nivel de dificultad (curso), tienden a optar por problemas con menos dificultades, con menos obstáculos y consecuentemente, que exijan menos tiempo de dedicación, menos esfuerzo, menos desgaste y, al mismo tiempo, faciliten mejores tasas de aciertos.

Esta permisividad a la hora de la elección del nivel/curso, que se puede traducir en menor esfuerzo y mejores resultados, es la cara bonita de dicha libertad, que obviamente tiene su contrapartida o reverso, que en este caso es aprender más lentamente, o menos cantidad de contenidos, pues los aprendizajes estables y duraderos están directamente relacionados con el esfuerzo o empeño que les dedicamos y no con la facilidad con que son resueltos.

En términos generales podemos hablar de un tiempo muy corto de dedicación a la resolución del problema. En promedio, los tiempos son signi-

ficativamente mayores entre los problemas fallados que en los acertados y, como acabamos de comentar, superiores entre los alumnos registrados en **winmates** que en los que no estaban. Es como si existiese, en estos últimos, una cierta prisa por dar la respuesta y continuar con el problema siguiente, como si existiese un tiempo límite para responder.

Pensamos que, en cierta medida, a través del ordenador el alumno puede sentirse más tentado a la acción que a la reflexión, como si el teclado y la pantalla le provocasen para que dé respuestas cuanto más rápidas mejor. Parece que hubiera un cierto traspaso de roles de los juegos (marciamos, tetrís, etc.) en los que prima sobre todo la acción (*intros por minuto*), con total desprecio por los errores cometidos, que en todos estos juegos de acción ocupan un claro segundo plano frente a las acciones rápidas y aciertos. Esa contaminación, si es que lo es, que creemos que sí, constituye uno de los grandes problemas de este tipo de trabajo sobre el ordenador.

La actuación de los alumnos frente a la máquina se ha asemejado a un comportamiento relajado frente al error, como si no existiese responsabilidad alguna entre responder correcta o incorrectamente, como si valiera todo, como si el teclado no fuese capaz de distinguir entre el acierto y el fallo de una respuesta, como si el artilugio del ordenador frente al trabajo les liberara de tener que hacer las cosas bien, o tal vez como si la ausencia de aprobación o desaprobación humana les eximiera del esfuerzo, la dedicación, el compromiso y la responsabilidad frente a la tarea bien acabada.

Esta tendencia a la acción, con las consiguientes respuestas rápidas, no ha podido ser frenada cuando los propios alumnos se han apercebido de que sus respuestas eran grabadas y se volvían, incluso, a reformular los problemas fallados junto con la respuesta errónea para pedirle una segunda respuesta, una segunda oportunidad de resolver de nuevo el problema.

En nuestra práctica hemos tenido que actuar en muchas ocasiones y de muy diferentes formas (haciendo copiar el texto en un papel antes de responder en el teclado, demandando una explicación sobre lo que pedía el problema, etc.) intentando frenar la velocidad de las respuestas. Porque esa tendencia a evitar los obstáculos puede aumentar respondiendo automáticamente mal a todos los problemas que presentan algún nivel de dificultad no deseable.

Ya hemos comentado las aportaciones de Vigotsky referentes a la zona de desarrollo psíquico, potencial y próximo en el que debería moverse el alumno que aprende. Ni el exceso de facilismo le aporta demasiado a su aprendizaje, ni el de dificultad, tampoco. El primero no potencia nuevas estrategias de pensamiento resolutorio y el segundo provoca rechazo y abandono de la tarea, que será sustituida por otra más asumible, sencilla y reconfortante a corto plazo.

La presencia activa del adulto (padre/profesor) en la RP favorece el incremento de tiempo en la tarea resolutoria de cada problema. Por otra parte, la falta de esa supervisión adulta, para muchos alumnos se convierte en una mezcla de falta de responsabilidad, distanciamiento y anonimato ante la respuesta. En este caso se trata de alumnos mayoritariamente no registrados en **winmates**, lo que implica que son ellos mismos los que eligen el nivel de dificultad, y lo hacen en un nivel significativamente más bajo al que correspondería a su nivel real de conocimientos, o si se prefiere, a su zona de desarrollo potencial, como comentamos anteriormente.

Se trata de un resultado solo aparentemente paradójico: mayor control individual conlleva mayor tiempo de resolución y mayor dificultad de los problemas resueltos tomando como variable controlada la edad del alumno. Frente a ello, alumnos que trabajan libremente en resolución de problemas en **winmates**, sin supervisión adulta, dedican menos tiempo a cada problema y cometen menos errores, pero también es cierto es que la dificultad de los problemas es menor.

Es un aspecto a tener en cuenta que parte de nuestra praxis y de las observaciones a que nos han llevado los datos analizados.

5.8.2 El efecto de los distractores

Los distractores que utilizamos en nuestros problemas pretenden hacer una estimación de cómo dichos elementos, que no aportan una dificultad intrínseca, pueden interferir en la eficiente obtención de la respuesta correcta.

Es cierto que se podrían haber evitado una buena parte de ellos, la mayoría, y se hubieran obtenido resultados mucho más optimistas y satisfactorios, pero también lo es que este entrenamiento para la vida, que eso es la enseñanza obligatoria, habría quedado algo cojo pues en las situaciones cotidianas se presentan de manera habitual problemas análogos y esos futuros ciudadanos adultos, hoy alumnos, se han de enfrentar y resolver.

La mochila de aprendizajes, destrezas y capacidad de resolución en la vida adulta ha de pesar más, en mi humilde opinión, que la creación y mantenimiento de una burbuja de enseñanza plana, divertida y sin esfuerzo. Aprender no siempre es divertido, al menos inicialmente, pero merece la pena dedicarle constancia y trabajo para poder llegar a disfrutar de lo aprendido y utilizarlo de forma favorable en la maduración o el crecimiento personal.

Estas pequeñas trampas entre los textos de los problemas que adquieren las más distintas formas, actúan a modo de tropiezos a lo largo del recorrido resolutorio y los alumnos con menos maduración, más pequeños,

menos reflexivos o más primarios e influenciabiles tienen más dificultades para solventarlos.

Unas veces se tratará de información inherente al concepto pero que se oculta explícitamente en forma de dato, otras consistirá en la presentación de información numérica en forma literal, lo que facilita una cierta opacidad del dato, otras se formularán preguntas inesperadas cuya respuesta no requiere operatoria ninguna pues solo se solicita un dato directo, otras se hará énfasis en un dato teniendo en cuenta su colocación (al inicio o al final) con la finalidad de ejercer una presión de ese dato sobre el resultado, etc.

Como vemos, la finalidad de todos los dispersores es más crear ciertos conflictos en la comprensión de los textos que incrementar la dificultad del problema. Persiguen que los alumnos no se confíen solo de las apariencias, ni de las suposiciones, ni de las presunciones y que se atengan lo más fielmente posible a la literalidad de los enunciados. Leer y releer el problema hasta estar seguro de comprenderlo es previo al inicio de la resolución.

No siempre los equívocos en la RP son imputables a carencias o deficiencias de conceptos y destrezas propias del lenguaje matemático. En general, analizados los distractores como fuentes de error están más cercanos a las deficiencias de lenguaje (lectoescritura) que los estrictamente matemáticos, conceptuales u operatorios.

Desgraciadamente, a veces, son mucho más globales. A veces se trata de problemas bastante anteriores evolutivamente hablando y también mucho más laboriosos de corregir. La falta de una capacidad lectora necesaria la convierte en silábica, a trompicones y sin sentido y ello dificulta enormemente la comprensión.

También la complica una pobreza léxica que queda reflejada en la falta de precisión de los conceptos muchas veces oídos y también usados, más como por aproximación que con esmero y exactitud. No pocas veces los problemas que aparecen en el área matemática están muy relacionados con estas deficiencias de lenguaje y con problemas de pobreza y simplificación léxica. Hablas y conversaciones abarrotados de *wai*, *mola*, *cachi* o *quetecagas* tan en boca de nuestros jóvenes y otros que, sin serlo, los simulan en un intento vano de pasar por tales.

La intencionalidad de utilizar distractores en los textos de nuestros problemas no es otra que intentar anclar lo más posible la comprensión del texto presentado, eliminando apriorismos, suposiciones y atajos ficticios, y erróneos, para llegar a la respuesta.

Ciertamente los distractores generan errores, al menos en la medida que la comprensión de los textos es, digamos, deficiente. Pedir datos directos y explícitos, que no requieren ninguna operación, escribir números en letra (nombre del número en vez de su o sus dígitos), etc, etc., puede ser un

buen ejercicio para disuadir a algunos alumnos de que la respuesta puede ser sencilla, que puede haber datos sin valor para obtener el resultado y por tanto no operables, etc.

El primer elemento en importancia para la correcta RP es, sin duda, la comprensión global del enunciado o texto del problema, lo que implica tareas para separar lo relevante de lo distorsionador o tóxico. Separar lo significativo de lo que no lo es, debiera ser uno de los temas fundamentales para los futuros ciudadanos adultos que mañana serán los alumnos de hoy. Enseñar para la vida decía Decroly en las primeras décadas del pasado siglo a través de la globalización y los centros de interés.

5.8.3 Conceptos matemáticos erróneos

La simple enumeración de errores cometidos en el lenguaje coloquial es una tarea inabarcable y frecuentemente pasa desapercibida porque es difícil verificar los matices que desea emitir el pensamiento a través del hablante. Es decir, no siempre utilizar una palabra implica forzosamente transmitir lo que entienden todos, o una amplia mayoría de los hablantes.

Comentaré un caso curioso, de entre tantos y tantos otros, que me dejó muy sorprendido en el momento de llevar a cabo el análisis de errores sistemáticos. Espero que sea lo suficientemente significativo para poder dar la idea de lo que pretendemos destacar y evitar, al tiempo, una interminable lista de errores difíciles de imaginar.

En ciertos problemas, situados, mas bien en cursos bajos, se alude al concepto semana como unidad de tiempo. Se supone, yo suponía, que decir semana era equivalente a decir 7 días y pretendía ver si los alumnos eran capaces de procesar y operar unidades de tiempo de forma adecuada.

Algunos de los errores sistemáticos que encontré venían de la mano del concepto semana. Es cierto que en algunas zonas, me estoy refiriendo concretamente a Cataluña, utilizar la frase *los días de cada día* es de uso frecuente y viene a ser similar a *los días laborables* con la que se comparte, y que son generalmente cinco.

Existen alumnos, suficientes para ser tenidos en cuenta, que atribuyen al término genérico de semana (y no semana laboral) a cinco días en lugar de siete, con lo cual tenemos que tres semanas son quince días y, siguiendo la misma lógica, los meses tienen entre 20 y 22 días.

¿Qué es lo que ocurre? Pues que se extraen de las semana los días, digamos, lúdicos, los *findes*. De esta manera se obtiene una semana sin ninguna connotación festiva o de descanso y se generaliza el concepto tomando la parte (cinco días) por el todo (siete días). El resultado es que para algunos alumnos la semana no tenía siete días sino cinco solamente.

Las palabras simbolizan conceptos y a través del lenguaje se hace viable la transmisión de los pensamientos. Pero qué ocurre cuando emisor y el receptor no identifican el mismo concepto ante la misma palabra? Pues ocurre que la información emitida no es la misma que la recibida y eso genera fallos de interpretación.

La formalización de todo el aparato matemático excluye como aceptables interpretaciones subjetivas sobre axiomas, medidas y definiciones. El pensamiento formal no es ni parcial, ni arbitrario, ni sesgado, ni aproximativo, ni relativo. Es lógico.

Errores semánticos cotidianos: docena–decena, semanal (cinco días laborables), par-impar-non, o matemáticos: $< - > - =$, dividendo, resto, redondeo, potencia, raíz, conmutativa, probabilidad, proporcionalidad, igualdad – ecuación y un largo etc. que puede imaginarse libremente el lector.

Errores de desconocimiento, falta de precisión o desajuste entre significados y significantes que facilitan interpretaciones incorrectas de los textos y errores en las respuestas. Errores que en parte se podrían aminorar con una mayor carga lingüística de los mensajes entre profesor y alumno, con una mayor exigencia de precisión en los conceptos, con una negación del adulto (profesor o padre) a entender al alumno con lo que sabemos que quiere decir, pero que no dice. Creo que sobra ese sobreentendimiento para forzar un lenguaje más rico, más preciso, y más evolucionado.

Somos conscientes de que esta postura docente de una cierta exigencia y rigidez metodológica es mucho menos aceptada socialmente, menos buenista, que suponer lo que se quiere decir aunque no se diga. Pero suponer lo que quiere comunicar el emisor y sustituirlo por lo que dice tiene una doble connotación negativa: primero, no estamos seguros de acertar en la previsión y segunda, no facilitando un desarrollo lingüístico que evolucione al ritmo de la edad cronológica tanto en términos morfológicos, como sintácticos o semánticos.

Se hace necesario, pues, revisar los ajustes entre el significado (concepto) y el significante (forma asociada a él) ya que en muchos casos esta falta de sintonía contamina la transmisión informativa. Debemos de evitar los supuestos de que el lenguaje ha adquirido su máxima cota cuando ya el niño habla y/o escribe. Queda aún un largo recorrido para la semiótica (señales) y para la semántica (contenidos) que debe ser potenciado desde el terreno educativo.

5.8.4 Errores de cálculo

Los fallos que hemos visto cometidos y referidos exclusivamente al cálculo tienen un amplio recorrido que cubre casi todo el abanico de posibilidades, aunque obviamente con distintas frecuencias.

Comentaremos en este apartado la amplia variedad de tipos de error que conlleva el cálculo, ya sea a través de las distintas operaciones, posición de cifras, utilización de los valores relativos de las cifras o los relativos a la aplicación de la conmutatividad. Dejaremos aparcados, de momento, los errores de concepto consistentes en el cambio de una operación por otra aún manteniéndose razonablemente aceptables las deficiencias o los lapsus que puedan aparecer en relación al cálculo.

La aparición evolutiva de dichos errores sigue la línea gradual con que se va administrando el aprendizaje de las operaciones: primero suma, después resta, más tarde las tablas de multiplicar y el producto, el cociente, relaciones, propiedades, etc, etc.

Respecto a la primera, la suma, de aparición más temprana y que se apoya inicialmente en el uso de los dedos, muestra ciertos obstáculos cuando la operación tiene más de dos sumandos y sobre todo cuando el resultado pasa a tener dos cifras.

Aparece una dificultad, en una parte de los alumnos, con la colocación correcta de los sumandos para hacer coincidir unidades con unidades, decenas con decenas, etc. Cuando este orden no es respetado los resultados salen disparatados. No es un tema ni menor ni excepcional de los primeros cursos. Podemos observar esta conducta también en alumnos con varios años de escolarización.

Más persistencia tienen los fallos derivados del *olvidarse de la que se lleva*, que tiñe de error una buena parte de la escolaridad si bien va decreciendo respecto a los primeros cursos. La resta, la segunda operación que se aprende, presenta unos mayores niveles de dificultad. Como en el caso anterior la correcta colocación de las cifras es una fuente habitual de errores, a los que se ha de añadir, a diferencia de la suma, la conmutatividad, la precisión y significancia del orden de los números que se operan. Minuendo y sustraendo no son intercambiables ni pueden ser colocados arbitrariamente arriba o abajo, pues el resultado, en la resta, sí que varía. Aquí *llevarse una* es una tarea bastante más sofisticada que en el caso de la suma. Ahora no se trata de que pasarse de la decena (10, 20, etc.) sino de encontrarse con una cifra del minuendo inferior a la del sustraendo, lo que requiere que añadamos 10 al primero para poder realizar la operación y continuar añadiendo esa unidad a la cifra siguiente del sustraendo. El proceso, aunque con variantes, presenta un mayor nivel de dificultad, lo que se transforma en más errores y también más persistentes en el tiempo.

Otro problema detectable en el caso de la resta, que dicho sea de paso solo preocupa a los alumnos más motivados por las matemáticas, es qué ocurre cuando la cantidad a restar (sustraendo) es superior a la cantidad de la que restar (minuendo). En ese caso se hace necesario ampliar el campo de los números, de los naturales a los enteros, y esas explicaciones requieren mayor nivel de conocimientos y maduración. Mientras tanto, a los pocos niños que preguntan al respecto se les comenta que eso ya se estudiará en su momento, y como suelen ser buenos alumnos comprenden el retraso y solucionado el problema. Todo ello a cambio de que no existan situaciones frecuentes en la que haya que recurrir a la ampliación de los enteros.

El producto, al igual que la suma y a diferencia de la resta, es conmutativo, es decir no interviene el orden de los factores en el resultado.

Continúan produciéndose los errores ya comentados de *llevarse las de la cifra anterior* si bien es cierto que el peso de tales errores tiene una relevancia menor frente a la resto de fallos.

El gran problema en la utilización de la multiplicación es el aprendizaje de las tablas de multiplicar, sin las cuales no puede realizar la operación de una manera ágil y efectiva. Dicho aprendizaje es uno de los grandes hándicaps en nuestros alumnos, no solo los de los primeros cursos de Infantil sino también en los de la ESO, todo ello adobado con el hecho de la existencia de multitud de *gadgets* que supuestamente están pensados para facilitar las cosas, pero son tan eficientes haciéndolo que además, también impiden su memorización.

El escalonado de las filas correspondientes a las cifras del factor inferior tiene sus reglas, y una de ellas, concretamente la de correr un espacio más en el caso de que aparezca un 0, no suele ser bien conocido y utilizado y presenta bastantes errores.

La división o cociente es la operación más compleja y difícil de las cuatro básicas. La falta de conmutatividad genera dos conceptos: dividendo (la cantidad que se reparte) y divisor (el número entre los que se reparte), conceptos que ni son fáciles ni se adquieren siempre definitivamente. A ellos se les añade el término cociente y el resto. Y a todos ellos otros muchos más que no pueden ser aparcados por más tiempo: decimales (que requieren la ampliación del campo de los enteros a los racionales), los múltiplos, divisores, etc.

Y por si la parte conceptual de la operación con toda la terminología que la acompaña no fuera lo suficientemente complicada, el aprendizaje y dominio de las tablas de multiplicar ha de estar mucho más asentado, incluso para ser usado de modo inverso (por qué número multiplico otro para obtener un tercero) y además bajando cifras, respetando los espacios, añadiendo ceros al dividendo y/o al divisor (cuando *no cabe*), contar las que nos vamos

llevando, etc, etc. ¡con lo sencillo que es apretar unos números y un signo en una calculadora!

Las formas abreviadas de dividir (también de multiplicar aunque en menor grado) por la unidad seguida de ceros, facilita la mecánica cuando es correctamente comprendida. Cuando no, es otra perseverante fuente de errores amplificada por la puntual presencia de comas decimales. No son pocos los alumnos incapaces de resolver una división de dificultad media en los cursos más altos de la Secundaria Obligatoria.

Común a las cuatro operaciones básicas tenemos otra dificultad añadida que es el uso de los decimales y las reglas que regulan su funcionamiento en cada una de ellas.

Resumiendo, existen errores sistemáticos asociados al manejo mecánico del cálculo, que es bastante deficiente (en general) en todas las operaciones pero mucho más ostentoso a medida que va incrementándose la dificultad de las mismas.

No pasaría nada, nada serio quiero decir, si los alumnos no supieran realizar operaciones pero supieran interpretarlas correctamente, utilizando la calculadora, por ejemplo. Pero este no suele ser el caso. Creo que todos los docentes hemos visto casos de alumnos que, profundamente convencidos, defendían que 2 entre 8 son cuatro, o que la mitad de 11 es 22 porque esos eran los resultados de la calculadora a la operaciones solicitadas (seguramente desconociendo los conceptos numerador, denominador y conmutatividad) sin tomar ningún tipo de verificación del resultado, es decir, en la creencia profunda de que la calculadora no hace lo que él dice, sino lo que él piensa que dice, que no siempre es lo mismo.

Habría de buscar un punto intermedio entre el antiguo talibanismo pedagógico curil y franquista de *la letra con sangre entra* y el buenismo roussoniano del Emilio o De la Educación muy anterior, concretamente de 1762. No es de recibo que los alumnos sean insensibles a errores que debían surgir ante resultados muy abultados o minimizados porque ello significa no solo que no saben operar con soltura, sino que no saben interpretar los resultados, lo que es mucho más grave

Respecto a la conmutatividad. Ocurre a veces que el orden que tienen los operadores dentro de la operación afecta al resultado que obtenemos. Cuando el resultado no se ve afectado por el orden de los operadores decimos que una determinada operación cumple la propiedad conmutativa, y es el caso de la suma y el producto, hablando exclusivamente de las 4 operaciones básicas. Es decir, el orden de los sumandos no altera la suma y el orden de los factores no altera el producto. No ocurre eso en el caso de la resta y el cociente y de ello ya hemos hablado anteriormente.

Solo pretendemos insistir en el hecho de que esta ausencia de conmuta-

tividad es una fuente añadida de errores relacionados con tomar el minuendo por el sustraendo o viceversa. Insistir en el concepto de conmutatividad de la resta primero, y del cociente posteriormente, debe ser un aspecto a ser tenido en cuenta de forma previa para ser abordado antes de comenzar con la metodología que requiere su aprendizaje.

Descolocación de cifras. Se trata de un tema ya comentado puntualmente en apartados anteriores. Si lo retomamos brevemente ahora es porque creemos que tal descolocación de cifras tiene una entidad y una dinámica propia más allá del uso concreto de cada operación.

En la suma y la resta, y para tener superadas las deficiencias de colocación de las cifras, se ha de conocer, comprender y asumir el funcionamiento de nuestro sistema numérico decimal, es decir, que cada cifra a la izquierda de la anterior tiene un valor 10 veces mayor, o si queremos decirlo de otra manera, se ha de tener conocimiento del valor posicional de las cifras que forman el número.

Sumar o restar unidades con decenas, o centenas con millares después de haber colocado incorrectamente las cifras son fallos comunes a dichas operaciones, de las que están excluidas producto y cociente, cuya resolución implica mecánicas más laboriosas que la situación correlativa de la milésimas, centésimas, décimas, unidades, etc. para la cuales la presencia del 0 (en el segundo factor (caso del producto) o del dividendo (caso del cociente) provoca una significativa cantidad de fallos de cálculo, que a veces son meros despistes pero mayoritariamente suelen ser lagunas de conocimiento muy relacionadas con la ausencia de práctica en tales destrezas.

Con todo, la división es la que genera más cantidad de errores de cálculo, lo cual es muy comprensible dado que en ella se acumulan tachas de la suma, resta y producto a las que se le deben añadir las propias de la división, que no son pocas.

Uso del decimal/entero. En los errores que aparecen al tratar los enteros como decimales o viceversa podemos hablar, al menos, de dos tipos de problemas. Por lo que se refiere al primero, a lo conceptual, insistimos en que las deficiencias en el uso correcto del sistema decimal son muy notorias. A ello ha ayudado poderosamente el uso de múltiples artefactos que nos facilitan los cálculos directamente sin dificultad, tedio ni esfuerzo, lo cual es el aspecto bonito del asunto, pero que tampoco facilitan la interpretación que debe hacer nuestro cerebro sobre los resultados, de manera que lo que obtengamos de la máquina calculadora pasa a ser dado por bueno sin ningún tipo de crítica ni verificación.

En segundo lugar tenemos la mecánica, la operatoria que nos permite el uso de décimas, centésimas, milésimas, etc., y que presenta, en general, más dificultades que el de las decenas, centenas, millares, etc. Los intercambios

o transformaciones entre los múltiplos de la unidad y sus divisores, el paso, por ejemplo, de decenas a centésimas o de milésimas a centenares no es sencillo para una buena parte de los alumnos de cursos bastante elevados.

No pocas veces podemos observar resultados que reflejan la débil comprensión y utilización del sistema decimal, la utilización caprichosa de la coma, confusiones entre conceptos como decena y décima, centena y centésima, etc.

Todo ello se traduce en un empleo confuso y equívoco de conceptos como producto y cociente, en un manejo errático de la utilización operatoria de la unidad seguida de ceros como elemento de intercambio y, finalmente, en unos errores desorbitados en los resultados que pasan desapercibidos por nuestros alumnos, insensibles a los equívocos por falta de perspicacia o de asimilación del sistema decimal.

No seríamos los primeros del mundo en observar que la tecnología en manos de quien no sabe utilizarla puede ser muy negativa. No se trata de polemizar con las decisiones de escuelas donde estudian los hijos de muchos *gurús* de Silicon Valley sobre la liberación de pantallas y ordenadores en escuelas privadas de élite, pero el hecho existe y tal vez merezca la pena una reflexión sobre si la equipación masiva de tecnología en centros públicos obedece más a negocios muy rentables que a beneficios netos en el aprendizaje de nuestros alumnos.

Toda la prudencia es poca sobre los experimentos tecnológicos de uso masivo en la educación obligatoria. Si dejamos de exigir el aprendizaje del cálculo porque tenemos calculadoras que lo hacen mejor y más rápido, ¿puede ser lo siguiente dejar enseñar a leer porque el ordenador puede hacerlo mejor que nosotros, y nos ahorra mucho tiempo que los niños pueden utilizar para ser más felices o consumir más?

Es un tema que debería ser retomado por claustros de profesores, asociaciones de padres de alumnos, inspecciones técnicas, etc. etc.

5.8.5 Error en la operación

No es nada frecuente que se le pida a un alumno que realice una suma y responda haciendo una resta o que se confunda una multiplicación con una división, por ejemplo. Las cuatro palabras de las operaciones básicas suelen estar bien asociadas a los correspondientes algoritmos y no suelen verse errores en estas órdenes que podíamos llamar directas. Pero esta comprensión inicial, este cotejamiento *término-algoritmo*, es solo el primer eslabón de un largo continuo de dificultades. Solo inicialmente los términos matemáticos aparecen perfectamente claros e inequívocos.

Recordamos que las matemáticas son útiles en la medida en que permi-

ten abordar y resolver situaciones cotidianas de una forma eficiente. Son un lenguaje que ha de reflejar fidedignamente el lenguaje que utilizamos para entendernos, para transmitir y ejecutar órdenes y que, por supuesto, es mucho más amplio y sobre todo mucho menos preciso. Y es aquí donde comienzan los problemas.

Sumar, por ejemplo, es también juntar, unir, adicionar, totalizar, etc. y aplicar el algoritmo suma cuando aparece un sinónimo de ella introduce una cierta dificultad en la elección, que suele ir relacionada con la pobreza de vocabulario. Y lo comentado para la suma se puede aplicar al resto de operaciones sin ningún límite. Pero no solamente se aporta dificultad desde la variante léxica de los sinónimos que tienen nuestros cuatro conceptos operatorios fundamentales.

Más allá de los problemas léxicos y de sinónimos que se plantean en nuestros textos existe un nivel de dificultad más sofisticado en donde descansen bastantes errores de elección de la operación correcta y que se juegan en el campo de la semántica. Ya no se trata de conocer más palabras, sino de tener una verdadera comprensión global del texto que debe superar las apariencias y las formas.

El lenguaje y el contexto en el que se utilizan las palabras, pueden producir cambios de significado en algunos conceptos hasta convertirlos en sus contrarios. Otras veces la clave de la operación a realizar no viene dada de forma clara y directa, sino a través de alguna de las palabras aparentemente más neutrales del texto.

Por último, deseamos mostrar como las destrezas o habilidades gramaticales, o su ausencia, tienen su juego en los errores a la hora de llevar a cabo optar por ejecutar una operación determinada. ¿Podríamos asegurar bajo esta perspectiva que los errores producidos en todos estos aspectos, u otros parecidos, están más relacionados con las matemáticas que con el lenguaje?

Es una pregunta sobre la que he pensado bastante y cuanto más lo pienso más claro voy viendo el potente papel de las deficiencias de lenguaje en las que consideramos que pertenecen al campo de las matemáticas.

En realidad la ambigüedad y falta de precisión lingüística en el campo léxico, gramatical o semántico constituyen un inmejorable terreno abonado donde echar raíces serias deficiencias de comprensión del lenguaje, que aunque estén presentes en la expresión y comprensión coloquiales, se hacen más perceptibles en el campo estrictamente matemático.

Cuando las palabras taponan los conceptos, el rico juego de matices que presenta el lenguaje tiende a reducirse a dos: el blanco y el negro. Cuando el respaldo lógico para efectuar una operación que nos lleve al resultado está en la aparición explícita de la palabra sumar, restar, etc., es que ya se ha renunciado a otros análisis más profundos y fructíferos.

Cuando para no ver los obstáculos que se pueden contener dentro de un enunciado optamos por cualquier respuesta, incluso sin un mínimo de coherencia, hemos de pensar seriamente en el qué y en el cómo sobre lo que estamos enseñando.

Cuando varios años de escolaridad no aseguran que los alumnos sepan utilizar adecuadamente las cuatro operaciones básicas, tal vez, deberíamos de pensar en cambiar las recetas que estamos utilizando en nuestras clases, en nuestras metodologías, en nuestras metas, en nuestras ideas.

Pero, al margen de los fallos a la hora de elegir la operación que necesita una resolución correcta, existen otras situaciones que nos confirman de nuevo la falta de comprensión del texto de un problema.

Así, cuando se formula un problema donde lo que se pide no exige ninguna operación sino que la respuesta coincide con algún dato explícito y se obtiene una respuesta que se ha elaborado a partir de una operación entre los datos, hemos de pensar que el fallo es más global y anterior a la confusión entre operaciones.

Lo mismo podemos decir de la eliminación gratuita de alguna de las operaciones. Se evita la posibilidad de error en la elección a cambio de la seguridad de un fallo por omisión.

Por último es preciso comentar que en determinados textos existen más datos y operaciones de los necesarios para la obtención correcta de la respuesta. Se pretende a través de ellos saber si el alumno es capaz de poder seleccionar de todo el conjunto aquella información que es necesaria, y solo aquella, de entre otra que actúa más bien como ruido.

También el denominador común de estos fallos está en la deficiente comprensión del enunciado del problema. Problemas de lenguaje que se reflejan en los problemas de matemáticas. Es frecuente que estos problemas pasen más desapercibidos en el trabajo del área del lenguaje que en el de las matemáticas, donde es más fácil crear entornos experimentales para analizar comportamientos, analogías y contrastes entre la forma de aprender.

Volvemos a tomar un tema que ya ha sido tocado tangencialmente más arriba. Creemos que merece la pena dejarlo bien explicitado. Sumar, restar, multiplicar y dividir (la lista podría ser más extensa, pero no lo creo necesario) son las operaciones básicas cuyo concepto, en general, se conoce, aunque otra cosa es que existan errores serios con la mecánica calculatoria (llevarse, bajar la cifra siguiente, colocación en escalera para las dos últimas etc).

Los problemas a los que nos referimos en este momento no son los comentados sino otros derivados de como el contexto, la sintaxis del texto, puede cambiar el concepto asociado a una palabra (señal) y convertirlo en su inverso. ¿Cuánto he de sumar a 7 para obtener 9? ¿A qué cantidad restaré 8 para obtener 10? ¿Qué cantidad restaré a 8 para obtener 10? ¿Por cuanto

multiplicaré 2 para obtener 10? ¿Qué número dividido por 5 me da como resultado 4?

Todo ese tipo de problemas muestran errores añadidos a los asumibles como de tipo de cálculo. No falla el cálculo o no solo es que falle. Falla que el contexto del problema asigna conceptos distintos, incluso contrarios, a los que esas palabras tienen originariamente y por defecto. Pensamos que es una idea sobre la que trabajar para evitar errores en los que el propio lenguaje varía sustancialmente el contenido de la palabra. El contexto puede cambiar el significado, la semántica, del significante.

5.8.6 Sobre la geometría

Tal vez los contenidos del área de Geometría sean los más devaluados y los conocimientos matemáticos más pobres en el actual sistema educativo español. Ya desde hace bastante tiempo, lentamente pero sin descanso, los aprendizajes relacionados con la recta, el plano, los ángulos, las figuras y los cuerpos geométricos, han ido desapareciendo de los libros de matemáticas y vemos con bastante desolación alumnos que acaban la ESO sin saber lo que es Pi ni para qué vale, sin saber calcular áreas o volúmenes de figuras o cuerpos cotidianos, desconocen las diferencias entre circunferencia y círculo así como la relaciones que guardan entre sí sus elementos, lo que es un paralelogramo o las características de un triángulo isósceles.

Artilugios o herramientas de conocimiento, habituales hace unas décadas, parecen proscritas de las aulas. El negocio de los libros de texto, expresado como un limón sin zumo (rey muerto) está siendo sustituido por el ordenador (rey puesto) y ofrece mejorar la caja y rebajar los tiempos y los costos.

¿Dónde se han quedado la regla, el compás, la escuadra, el cartabón, y el transportador de ángulos, etc, que nos iban acercando al mundo de las formas, las mediciones, las deducciones y que dejaban la puerta abierta a otros saberes más sofisticados y profundos como los diseños industriales, la ingenierías y arquitecturas, los diseños y planos, la perspectiva y la composición, etc?

¿De verdad pensamos que, con carácter general, el ordenador puede sustituir todas esas herramientas ausentes de nuestra aulas y casi desconocidas por nuestros alumnos?

La vida cotidiana está llena de figuras en el espacio que guardan ciertas distancias entre ellas. Dichas distancias pueden generar formas determinadas por tamaños y ángulos y el estudio de las reglas de su comportamiento nos permite descubrir nuevas informaciones en base a la deducción.

No es muy arriesgado pensar que la geometría está en la base de las ma-

temáticas y por tanto podría ser su punto de partida. ¿Será verdad que cerrando la puerta a la ventana de la Geometría estamos obstaculizando, o al menos no favoreciendo, el acceso al maravilloso mundo de las matemáticas?

La autoridad de los profesores, en franca retirada desde la década de los 90 del siglo anterior, no puede paliar esas pequeñas biblias de usar y tirar en que se han convertido los libros de texto y el pingüe negocio editorial que conlleva.

Lo que sí podemos constatar es que el bagaje de conceptos geométricos es ciertamente muy pobre, que el desconocimiento los elementos de las figuras y los cuerpos es muy abundante y que la capacidad de deducción lógica y de inferencia, basadas en las leyes y relaciones que vinculan entre sí los distintos elementos, es manifiestamente mejorable.

Seguramente el destrozo más claro que haya tenido lugar en la dejación de aprendizajes matemáticos desde el último cuarto del siglo pasado esté relacionado con la Geometría. Ya no se trata de desconocimiento de fórmulas o errores de cálculo, de falta de relación entre significados y significantes (palabras y conceptos), sino del desconocimiento de palabras como apotema, radio, obtuso, tetraedro, superficie lateral y total, Pitágoras, Pi, generatriz, pirámide truncada, seno, coseno, tangente, etc.

No es cuestión de hacer un pequeño esfuerzo por actualizar algunos conceptos que pueden estar mal adquiridos u olvidados, o algunos conceptos usados con altas tasas de error, es cuestión de comenzar, de traerlos nuevamente al currículum real de las matemáticas básicas, a comenzar por el punto y la línea e ir avanzando poco a poco hasta llegar al conocimiento de cuerpos y figuras, de superficies y volúmenes, del conocimiento del triángulo con todas sus variantes, de la trigonometría y una largo etc. que evitaré para no cansar con la lista de déficits.

Tal vez sea la geometría el origen del pensamiento matemático que ya permitió a Anaximandro, primero, y después a los pitagóricos estimar lo ilimitado. Era el siglo VI antes de Cristo y tuvieron lugar las primeras aplicaciones matemáticas en el sistema astronómico. Filosofía, ciencia y religión eran parte del mismo objeto de conocimiento. Y todo eso merece un reconocimiento, al menos.

5.8.7 Algo de lógica

Utilizamos en este apartado el vocablo *lógica* en su sentido coloquial, es decir, más cercano al uso popular que al que se encuentra en los tratados de lógica formal, silogística, etc.

Nuestras observaciones están basadas en unos problemas que de entrada muestran una cierta incoherencia formal, al menos de forma aparente, en su enunciado y también otros cuyas respuestas no requieren operaciones pero sí una lectura atenta, una absoluta comprensión y una reflexión pausada.

Por una parte se plantean enunciados donde sus objetos están dotados de atributos o cualidades dobles, lo que complica su comportamiento único al ser relacionados u operados para su resolución. Se trata de ver hasta donde llega la capacidad analítica de los alumnos cuando se ponen en juego adjetivos que condicionan la operatoria, cuando la operatoria de los datos necesita correcciones, cuando la información operable no aparece únicamente en forma de datos numéricos sino en otros elementos, léxicos, del problema, cuando la información relevante no viene exclusivamente en formato numérico.

Se pretende con estos problemas romper con la independencia de los datos presentados, de forma que asumir por defecto dicha independencia lleve a contradicciones insalvables.

Se trata de valorar que no siempre las cualidades de los objetos que manipulamos son excluyentes (azul/rojo, alto/bajo, niño/niña, frente a azul/rojo/otro color, alto/bajo/grueso, niño/niña/altos, etc., por ejemplo) y en consecuencia a veces no nos sirven operaciones directas sobre los datos, sino cambiar el foco con el que leemos los textos y ampliar el análisis de lo que observamos.

Vemos que, complementando aspectos que hemos citado, lo llamativo o estridente tiene más fuerza dentro del problema, los colores fuertes se imponen sobre los neutros o la ausencia de ellos, lo concreto se antepone a lo ambiguo o abstracto, lo que no exige esfuerzo prima sobre lo costoso y difícil de entender, se eliminan trozos de texto que introducen condicionales y complejidad y se redondea la mecánica bajo el principio de realizar el mínimo esfuerzo. Las contradicciones mostradas, más que a resolverse con el paso del tiempo y con mayor dedicación, tienden a persistir ignorando total o parcialmente el fragmento de texto que las genera.

Y para ello son buenos todos los elementos que se tengan a mano y que ya hemos comentado previamente: tomar atajos que eviten dificultades, recurrir a elementos reiterativos, operar todos (o ninguno) los datos mostrados, según convenga, sustituir ciertos conceptos por sus respectivos opuestos o inversos, cuando aporten sencillez y facilidad, etc. Y todo ello con bastante

falta de interés por la obtención de una respuesta correcta y a veces tan siquiera verosímil.

Permítanme una licencia, tal vez exagerada, pero que puede tener algún viso de verdad: Tantas veces han escuchado los niños aquello de *lo importante es participar...* y se supone que no ganar, que una buena parte de ellos se han imbuido de ese espíritu, propio de los eventos lúdico-deportivos, que se ha proyectado en otras esferas de la actividad infantil como la intelectual y escolar. Parece como si se hubiera instalado en sus mentes la prioridad de lo hecho a lo bien hecho, del hacer muchas cosas mediocres a pocas cosas pero bien hechas, de actuar ante el primer impulso a ser reflexivo ante la acción, de hacer mucho aunque mal antes bien aunque sea poco.

Por otra parte, no podemos dejar de comentar otros problemas que aunque codificados en la misma categoría por tareas de clasificación, son bastante diferentes de los que hemos comentado anteriormente.

Es sencillo responder *Sí* (descartando *No* y *A veces*) cuando se pregunta: *¿Es el perro un animal?* Pero no lo es tanto responder: *A veces* (descartando *Sí* y *No*) cuando se trata de contestar a otra, como por ejemplo, *¿Es el animal un perro?* El hecho de que ambas tengan las mismas palabras y se mantenga la estructura idéntica de la pregunta hace que pase desapercibido, por algunos alumnos, la sustitución entre el sujeto y el predicado.

Este tipo de error, con niveles de dificultad significativamente altos, refleja una confusión cuando procedemos a intercambiar ambos elementos de la frase; es decir, parece que el hecho de que A sea siempre B arrastra a algunos alumnos a pensar que B también sea siempre A. Es un error de conmutatividad lógica, podríamos decir, en sujetos y predicados no intercambiables. Es una deducción interferida por una verdad evidente que queda afectada por el intercambio entre el sujeto y el predicado. Se trata de una realidad tan potente y tan fuerte que se puede mantener aun cuando se conmutan los elementos del enunciado.

No partimos de una gran masa de problemas de este tipo, solo 51, pero creemos que son suficientes para poder establecer una cierta línea de tendencia, al menos en una parte no despreciable de la población escolar.

Pensamos que la silogística no es una mala introducción a temas de lógica. Es verdad que el silogismo es un tema *demodé* y limitado, pero no para intentar establecer unos inicios en el pensamiento lógico: premisas, antecedentes y consecuentes, universales, particulares, etc, etc. *Barbara*, *Celarent*, *Darii*, *Ferio* eran, según Aristóteles, los modos más perfectos de silogismo, los de la primera figura. ¿No es este un buen lugar para comenzar?

5.8.8 Multiplicativos y partitivos

Los multiplicativos y los partitivos son unos adjetivos usados en el lenguaje habitual y podemos encontrarlos de forma frecuente en cantidad de frases en multitud de contextos y situaciones cotidianas.

Según la Wikipedia del Español, los numerales multiplicativos son los que expresan el número de veces que se da o se repite una cantidad, es decir, los que expresan una multiplicación. Los más usuales son doble, triple y cuádruple, aunque la lista es mucho mayor (llega hasta el 16 o sextodécuplo e incluye décuplo y céntuplo, multiplicado por 10 y por 100 respectivamente). Añadiremos a todos ellos una forma genérica, que es *veces* precedida de un número que indica la cantidad por la que algo ha de ser multiplicado.

Los partitivos o fraccionarios son los que representan partes o fracciones en que se puede dividir una unidad y los más frecuentes son mitad, tercio, cuarto, quinto, sexto... con sus respectivos sinónimos (medio, tercera parte, cuarta parte...). Cuando los denominadores de la fracción son mayores de 10 (décimo), la denominación se forma, de manera regular, con el número al que se le añade la terminación *avo*.

Dicha regularidad, junto con la dificultad que conllevan los ordinales, hace que estos últimos sustituyan su nombre por los correspondientes partitivos, de forma que, de hecho, los terminados en *avo* pueden ser partitivos de fracción mayor de 10 u ordinales superiores a esa cifra.

Los multiplicativos son más fáciles de usar que los partitivos y generan menos errores tanto de concepto como resolutorios. Y ello se debe principalmente a dos causas:

La primera es que el concepto de multiplicar es más temprano tanto del punto de vista evolutivo como escolar que el de dividir. El cálculo de los multiplicativos es más directo e intuitivo (multiplicar por un número) mientras que la utilización y el cálculo de los partitivos es más bastante más sofisticado (dividir por un número, aparte de entender el concepto).

La segunda es que, a pesar del costo del aprendizaje de las tablas de multiplicar, del que también participa la división, la resolución mecánica del algoritmo de esta última es bastante más complejo que el de la multiplicación. Todo ello se traduce en que los partitivos conllevan un mayor número de errores.

Calcular, por ejemplo, el *doble* de una cantidad, tendría una dificultad equiparable a obtener la *mitad* de otra, si hacemos abstracción de la dificultad mecánica añadida de la segunda. Ahora bien, en el caso de los partitivos se abre un juego lleno de dificultades, a las que los multiplicativos son ajenos.

En efecto, una cosa es calcular un tercio de 6, por ejemplo, (dividir 6 por 3) y otra, algo más complicada, calcular cuántos tercios hay en 6, que exige in-

vertir la operación (multiplicar 6 por 3) o, lo que es lo mismo, dividir 6 por $\frac{1}{3}$.

Esta dificultad añadida de los partitivos no la comparten los multiplicativos, porque en ellos no tiene demasiado sentido plantearse, por ejemplo, *¿cuántos triples hay en 6 o cuántos cuádruples hay en 16?*

Y planteamos esto en términos estrictamente prácticos y eso debe ser porque los partitivos forman parte y están más integrados en nuestras medidas y usos cotidianos. Mayor utilización, más matices, más complejidad y, en consecuencia, más dificultad.

Los errores más estables que hemos encontrado en este apartado se pueden resumir de la siguiente manera:

- Las confusiones son máximas entre multiplicativos y partitivos correlativos, es decir, *doble/mitad, triple/tercio, cuarto/cuádruplo*, etc.
- Comparadas con ellas, los fallos entre los distintos multiplicativos (*doble, triple*, etc) o entre los distintos partitivos (*mitad, tercio*, etc), son muy sensiblemente menores.
- No es infrecuente ver multiplicativos o partitivos que son completamente ignorados en la resolución de los problemas, o bien, cambiados unos por otros sin ninguna explicación aparente.
- Aparecen errores mecánicos de cálculo, no de concepto, que son mayores en los partitivos cuando la operación implica la aparición de decimales, que no es raro verlos eliminados, como si se trabajase con números enteros.
- El uso de *veces* precedido de una cantidad, por la que se multiplica, es un concepto muy abierto y permite ver una amplia gama de comportamientos que van desde ser ignorados hasta ser sustituidos por *doble, tercio*, etc.

Además, cuando *veces*, precedido de un número, va seguido de la palabra *menos*, el *veces multiplicativo*, que necesita de un producto, se transforma en un *veces partitivo* y la operación que requiere es la inversa, es decir, la división.

Es posible que parte de los errores que podemos ver en el uso de multiplicativos y partitivos, en la sustitución de uno de ellos por su inverso, sea debida a su carácter relativo. Nada es el doble o un tercio en sí mismo porque multiplicativos y partitivos siempre hacen referencia a otras cantidades, sin las cuales no existen. Y curiosamente las confusiones detectadas en ambos tipos de conceptos lejos de ser aleatorias muestran como esos otros como referencia.

Por ejemplo cuando se utiliza *8 como mitad de 4* en vez de *8 como doble de 4*, o *4 como mitad de 8* podríamos estar ante una simple sustitución de doble por mitad en base a una transposición entre el sujeto y predicado de la premisa. La constante en este tipo de error no son las cantidades referenciadas ni los cálculos, sino la relación que se establece entre las cantidades partien-

do de que siempre una de ellas es doble de la otra que es, a su vez, mitad de la primera. Y para el resto de pares (triple-tercio, cuarto-cuádruple, quinto-quíntuple, etc.) el razonamiento sería análogo.

Pensamos que convendría hacer más incidencia, mayor práctica y una casuística de ejemplos mayor, explicando la relación especial que tienen estas parejas de conceptos, analizando sus equidistancias, evitando que sean utilizados indistintamente, y recalcando que se trata de parejas de conceptos inversos, no sinónimos.

5.8.9 Sistema métrico y decimal

También nos ha llamado la atención, no por la excepcionalidad sino por las fuertes derivadas de su desconocimiento, el paupérrimo bagaje que tienen los alumnos del sistema métrico decimal.

No es que existan errores esporádicos en las equivalencias entre múltiplos y submúltiplos de distintas medidas, es que existen problemas en la acotación de los conceptos referidos a las unidades.

Les suena aquello de litro, el metro y el gramo (más que nada porque las han oído muchas veces y en muchos contextos), pero utilizarlo en situaciones donde hayan de ser operados (transformados, cambiados, relacionados...) supone una fuente de errores muy significativa. Las unidades cuadradas o cúbicas no juegan en esta división pues operar (multiplicar o dividir) por 10 o por mil en vez de hacerlo por 10, y hacerlo con soltura es un nivel reservado solo para los muy buenos alumnos, que son aquellos que lo han comprendido y ejercitado lo suficiente.

Con todo ello, pienso que aún es peor la situación de ignorancia sobre el funcionamiento del sistema decimal base de nuestro sistema numérico.

Escribir numéricamente mil tres, por ejemplo, como 10003, no es raro en alumnos de ESO, mayores de 12 años, con más de 6000 horas de estancia en clases, de las cuales seguramente más de 1000 han sido dedicadas a matemáticas. Estos fallos ponen de manifiesto que los alumnos sin esas competencias matemáticas básicas adquiridas antes del final de la ESO van a ser pasto de engaños y estafas en su vida adulta posterior, pues no tienen una formación mínima que pueda defenderlos frente a un mundo tan competitivo y agresivo.

¿Les enseñamos realmente para la vida, o nos da igual cual sea su vida una vez acaben la engañifa de esa bazofia que les estamos procurando y que se vende como enseñanza? ¿Dónde están los responsables de todas las medidas tendentes a agrandar el fracaso de una educación obligatoria que es tan costosa?

¿Se han confundido los diseñadores legales o han acertado de pleno (y

nos lo quieren colar como confusión) situando el fracaso en un 40%... siendo benévolos?

¿Existen intereses inconfesables para hacer del sistema de enseñanza público un sistema asistencial o de almacenaje en el que quien quiera educación para sus hijos que se lo pague, como en EE.UU.?

Desde el punto de vista educativo, el cuanto peor, mejor, no es una muy buena medida para facilitar un lento pero continuo trasvase de alumnado del sistema público gratuito al concertado (también tocado), y desde este finalmente al privado, decimonónico y elitista.

¿Es esta la respuesta desde el estado de bienestar? De ser así prefiero no ponerme a pensar lo que estaría ocurriendo si estuviésemos en un estado del malestar.

Que existan alumnos con seis o más años de escolaridad obligatoria que cuando oyen o ven escrito, por ejemplo, *mil tres*, escriban 10003 (citado previamente), y que sean incapaces de reconocer el error, debería clamar al cielo a los constructores del edificio educativo, pero parece que no.

Si esto es Sistema de Numeración Decimal, de base 10, la base de nuestro sistema numérico, lo que ocurre con el sistema métrico, con las relaciones de medidas de peso, longitud, capacidad y volumen es mucho peor: *deci*, *centi* y *mili*, *deca*, *hecto*, *kilo* y *miria* no es una clase de latín, son los prefijos de los múltiplos y divisores de nuestras magnitudes que determinan su valor. Por otra parte, las relaciones entre capacidades y volúmenes son de las más confundidas dentro de esta gama de errores que estamos comentando.

No estaría demás dedicar unos tiempos de explicaciones y ejercicios prácticos para afianzar elementos claves de nuestro Sistema Métrico. No siempre tendemos a Google cerca para que nos diga cuántos kilogramos son 350 gramos.

5.8.10 A modo de síntesis

Bien. Toca hacer un poco de síntesis, de cierre, en este apartado de conclusiones que parcialmente se han ido comentando en puntos anteriores.

Buscando, originariamente, la mejora de las respuesta a la RP, se fue creando una gran base de datos con miles del problemas que cubrían la mayor parte de los aprendizajes matemáticos de la enseñanza obligatoria.

Comenzaba el despliegue informático, con el que me iba familiarizando, y pensé en una manera de obtener las respuestas que un niño daba a problemas matemáticos de dificultad creciente para estudiarlas y comprenderlas. Los primeros alumnos reales fueron mis hijos, las primeras colecciones de problemas fueron pensadas para ellos al comienzo de su enseñanza obligatoria y los primeros errores sobre los que investigué también fueron los suyos.

La experiencia dio un salto de gigante a través de las primeras aulas informáticas de los centros docentes y más tarde, mayor aún, a través de Internet.

Aumentaba la base de problemas creando, por cada error, varios más modificando sutilmente su presentación (longitud del texto, operaciones, conceptos) e intentando acercarme a una especie de continuo de dificultad que evitara los grandes saltos. Y así se llegó a los 6000 problemas, miles de alumnos, millones de respuestas, etc. que fueron retomados en los tiempos de COVID, ya jubilado.

Con mucho tiempo por delante, fue interesante ojear toda la información guardada en las bases de datos con aciertos, errores, tiempos de respuesta, etc., etc. Había mucha información en las bases y no toda ella era igualmente válida. Era preciso deshacerse de mucho ruido introducido como respuestas y limpiar antes de analizar. Así se pasó de 6000 problemas de la tabla originaria a 2486, sobre los que hemos trabajado.

Búsquedas de datos, agrupaciones de información, contraste de valores, casuística y seguimiento de errores por grupos de edad, por dificultad, etc. Dos grupos de alumnos y de respuesta: los registrados y *tutorizados* y los que van *por libre* con análisis puntuales diferenciados.

Se han llevado a cabo muchas búsquedas de cara a ampliar diferentes indicios surgidos tras las observaciones y se ha invertido bastante tiempo en aprender a interrogar a las numerosas tablas de la base de datos en SQL.

Lo más significativo, según nuestro criterio, de todo lo que hemos ido encontrando, es lo que mostramos en este trabajo: presentación de tablas, análisis e interpretación de errores, sugerencias de mejora en el aprendizaje matemático a través de RP. Incluso se ha deslizado alguna crítica mordaz a los políticos, sus altavoces mediáticos y sus brazos ejecutores (pedagogos oficiales e inspectores por libre designación) que ocupan la responsabilidad última de todo este desaguisado que tenemos en la enseñanza, de las matemáticas o de las no matemáticas.

Cuando los destinos de una sociedad se ponen en manos de cualquiera, en la sociedad puede pasar cualquier cosa, como vemos.

Reiteramos nuestro convencimiento de que no se puede aprender nada serio sin esfuerzo, que el facilismo es una mala inversión de futuro, que no se puede homogeneizar la bajada de conocimientos para contentar a una mayoría y que el *jajajá* de los 6 a 16 años tendrá, para una buena parte de esos niños y jóvenes, unas consecuencias funestas.

Y no es solo porque no hayan aprendido conocimientos, estrategias o procedimientos sino porque no han aprendido hábitos de trabajo, metodología, pasión por aprender, gusto por saber, luchar para conseguir algo de valor de lo que, internamente, puedan sentirse orgullosos.

El tiempo de la plasticidad de su cerebro puede haberse malgastado en-

tre pseudo-felicidades de corta duración y risas gregarias. No habrá una segunda oportunidad para volver a ser niño a pesar de que no pocos intenten prolongar este estado hasta más allá de los 30 años. Tendrán comportamientos de niño (dependencia económica y familiar...) pero no lo serán, y tendrán que asumirlo, aunque no quieran, antes o después.

Tal vez la conclusión más amplia que se pueda extraer de este estudio sobre el comportamiento del error en RP, vaya más dirigida al área del lenguaje que a la de las matemáticas. Me explicaré.

La RP se inicia en un texto (no una imagen) que se ha de comprender previamente a cualquier tipo de acción. Una vez comprendido el problema en su integridad, viene la manera de resolverlo en la que entran diversos factores (operatorios, de relación, técnicas, etc.).

Si el problema ha sido comprendido perfectamente y se produce un error en su resultado podemos deducir que ese error es un error matemático.

Pero ¿que podemos decir de un problema de cuyo texto estoy entendiendo solo una parte, o lo que es lo mismo, no en su totalidad? ¿Es real atribuir ese error al área matemática cuando no se entiende (por causas diversas), desde su estricta lectura, lo que dice y/o pide el texto?

Obviamente, los conocimientos matemáticos tampoco responden, claro. Esto no es un lavarse las manos echando balones fuera, no. Podríamos decir que si falla el proceso lector, anterior y más sencillo, lo que viene después fallará también, pero no porque sí, sino porque antes de dar un salto más grande hay que saber darlo más pequeño.

Hace falta mejorar la comprensión lectora para saber lo que se pide en el problema, los datos que se aportan, si toda la información que se presenta es relevante o superflua. La vida no suele ser tan condescendiente ni comprensiva con los ciudadanos adultos como las pedagogías del buenismo, ausencia de esfuerzo y supuesta progresión adecuada, lo son con los alumnos.

Por otra parte existe una falta de traducción del lenguaje ordinario al lenguaje matemático. Cientos de palabras, adobadas en sus diferentes contextos, han de ser traducidas a las cuatro reglas y poco más, y ello incluye comprensión global y profunda del texto y excluye atajos (la palabra *suma* puede significar resta dentro de un texto), etc.

La falta de dominio lingüístico afecta también a la ausencia de precisión, cuando no desconocimiento, de conceptos de uso cotidiano cuyos errores se multiplican cuando a estas dificultades se añaden otras de tipo aritmético, operatorio, lógico o elementos de distorsión. Entre otros muchos conceptos, oídos pero no aprendidos, tenemos los siguientes: minuyendo, exponente, raíz cuadrada, cociente, redondear por exceso o por defecto, etc. etc.

Respecto al Sistema Métrico y Decimal, el poco conocimiento del sistema de medidas es espectacular. Hablar de dm, toneladas o metros cúbicos es

casi como hablar en un idioma extranjero aunque las palabras se hayan oído cientos de veces. No se tienen asimilados los conceptos.

Tampoco se tiene asimilado el que hace referencia al núcleo duro del sistema de numeración decimal, de base 10, donde el orden de las cifras y el uso de la coma es clave. Y, por desgracia, dónde no es raro ver como se ignoran los ceros, a la derecha o a la izquierda de la coma, en números de varias cifras por parte de alumnos con 7 u 8 años de escolaridad obligatoria.

En relación a la Aritmética he visto que aparte de las dificultades intrínsecas del aprendizaje de los mecanismos resolutorios de la operatoria básica, que se van adquiriendo muy lentamente, la división con decimales, por ejemplo, está lejos de ser bien resuelta por la totalidad de la población que cursa 4º de la ESO (tras 10 años de escolaridad obligatoria).

Y existen otras dificultades menos difíciles, digamos, como la descolocación de cantidades en la suma o la resta en la que los 0 a la derecha de la coma son eliminados como si estuvieran a la izquierda y sin coma. Son los resultados erróneos por el desconocimiento del sistema decimal.

Otro problema añadido a la aritmética en tanto en cuanto el estudio de los números y las operaciones elementales que los rigen, es el uso de los multiplicativos y partitivos fraccionados, como conceptos rápidos que disparan la operación.

Y aquí volvemos al tema del lenguaje. Saber lo que significa un tercio no es lo mismo que dividir por tres, cuando lo que te preguntan es, por ejemplo, *cuántos tercios de tarta hay en 6 tartas enteras*. El contexto puede darle la vuelta al concepto y evitar esa confusión exigen tener una comprensión absoluta de lo que pide el problema.

Es creencia bastante aceptada que la Geometría está en la base del conocimiento matemático. Y si es cierto, que yo creo que sí, es más fácil entender porqué la geometría ha sido la primera que comenzó a desaparecer, de facto, de los currículos de la enseñanza obligatoria, allá por 1990, con la LOGSE y eso de la ESO, cuando la enseñanza dejó de ser General y Básica, para convertirse en Obligatoria.

Ya se ha dicho que la Geometría es la cenicienta de la casa en ruinas que es la RP en particular y de las matemáticas en general. ¿Dónde han quedado el diámetro, PI, los ángulos obtusos (no hablemos ya de los adyacentes internos y externos), la perpendicularidad, los triángulos rectángulos, los octaedros, el teorema del cateto, de Thales o de Pitágoras, la longitud de la circunferencia, el volumen de la esfera, la escuadra y el cartabón, los planos, y las escalas, el discriminante, la hipérbola, las ecuaciones bicuadradas, los porcentajes, las proporcionalidades?

A una buena parte de nuestro alumnado seguramente estas son cosas que le suenan, sí, pero a chino. No saben manejarlas ni ponerlas al lado de

sus destrezas resolutorias.

Ya, ya sé que existen calculadoras, teléfonos e Inteligencia Artificial, pero mucho me temo que no van a estar al alcance de los alumnos con estas tipologías, futuros ciudadanos libres, sobre todo, de conocimientos. Hemos comentado que los nuevos aparatos disparan a la acción, apretar botones; si no funciona con uno se pisa otro y así hasta obtener una respuesta seguramente reforzada de sonido y colorines.

Poco tiempo dedicado a la resolución de los problemas, que si bien es mayor en los problemas fallados, parece no ser suficiente para eliminar ciertas trabas adicionales en el texto, que pasan desapercibidas ante una lectura rápida incapaz de la comprensión global del problema y menos de los posibles distractores añadidos.

Las diferencias en el rendimiento de los alumnos registrados (tutorizados) y los que van por libre arroja datos de interés. La presencia adulta (profesor o padre), que también indica deseo de mejora sobre el aprendizaje, seguimiento de la tarea, etc., puede servir de freno a la hiperactividad que generan las pantallas. Un hándicap en este tipo de trabajo es frenar la actividad resolutoria de los alumnos que parecen competir con los problemas como si se tratase de *marcianitos* u otros juegos de ordenador donde la acción prima sobre la lectura reflexiva.

A la enseñanza le hace falta un buen repaso, desde reajustar los tiempos de dedicación a los aprendizajes con proporcionalidad a la dificultad que llevan inherentes, hasta aumentar el respeto por el rigor y la objetividad, tanto en la selección del profesorado como en la elección de contenidos, pasando por fortalecimiento del eje de la libertad conjugada con la responsabilidad, incluso en edades tempranas, por favorecer el esfuerzo en vez de banalizarlo, por abandonar la experimentación sin conocer los resultados, por formar más que modelar con renuncia expresa a las tentaciones para colocar las orejas del adoctrinamiento y la ideologización orientadas a la homogeneización de resultados a la baja.

Conozco el sistema y sé que estos comentarios pueden ser duramente criticados por algún profesorado hiperventilado o por algunos padres sobreprotectores. Pero también sé que otros muchos, ante el tema de la educación, no están para pamplinas y prefieren apuestas a medio y largo plazo.

La terapia del *aquí y ahora*, pensada y llevada a cabo con éxito frente a determinadas conductas de ansiedad, que enfatiza el presente, desprecia el pasado e ignora el futuro, parece haberse generalizado o bien suponer que todos (los alumnos) necesitan del guiño gestáltico para sobrevivir.

Generalizar el uso de una terapia sobre un problema psicológico cuando no existe problema psicológico, equivale a crearlo. Eliminar el aprendizaje de la tolerancia a la frustración es un gran error que se pagará en la vida

adulta de muy diferentes formas.

Los tiempos van cambiando muy deprisa y será necesario mucha cintura para construirse una idea del mundo que sea lo más propia posible aunque con correcciones, enmarcada en el respeto y en la carta de ciudadanía como bien supremo, donde quepa una legalidad cambiante, pero respetuosa, donde exista una diversidad tan real como tolerante, un bienestar conseguido de forma autónoma mejor que regalado (no hay nada gratis), un respeto por la separación de los poderes que nos distancie de los populismos de la dictaduras encubiertas, tan visibles en la actualidad.

Los poderes públicos de las democracias occidentales se deben a sus representados. No son brazos ejecutores de los trazados y agendas de una docena y media de supermillonarios que se sienten dueños del mundo, comprando empresas, inteligencia, voluntades y tiempo.

Los poderes públicos son nuestros intermediarios, no los intermediarios entre las élites y nosotros.

Y para esa labor de vigilancia necesitamos una educación seria, rigurosa, estudiosa de la realidad, contrastada, y no los devaneos inconsistentes, facilismos ficticios y buenismos impostados. La realidad es compleja y a veces difícil de estimar, pero ignorarla no es la mejor manera de manejarla.

Al final de cada subapartado de estas conclusiones nos hemos permitido dar unas pequeñas sugerencias a modo de orientaciones de por dónde podrían ir las actuaciones didácticas, desde el aula, desde la praxis, para reducir la presencia de los errores que han sido comentados.

No estamos planteando grandes innovaciones pedagógicas para la disminución de los errores en la RP. Se trata más bien de cuestiones de sentido común que surgen a partir de los errores observados en nuestro trabajo.

Comentamos lo que hemos ido haciendo en el convencimiento de que puede ser de utilidad para alumnos con problemáticas análogas a las que presentaron una cantidad significativa de alumnos de nuestras muestras.

6. Anexos

En este apartado incluimos informaciones agrupadas de las que ya hemos dejado constancia a lo largo del trabajo, pero que van apareciendo de forma secuencial y tal vez algo dispersa. Pensamos que de esta manera podemos facilitar un mejor acceso a informaciones que tal vez requieran ser ojeadas más de una vez para tener una comprensión más amplia de los contenidos que se han ido mostrando y comentando.

Unas veces se tratará de requerimientos y formalidades necesarios para entender la metodología, períodos, temporización, comparabilidad y proyección de algunas observaciones y otras, mostrar en un mismo apartado aquellas las tablas que recogen los conceptos, frecuencias, categorías, etc, sobre las que fundamentamos nuestro análisis.

En el primer caso, **6.1. Aclaración de términos**, incluiremos todas aquellas acotaciones de concepto y de magnitud que hemos realizado en las tareas de filtrado y selección de problemas. También las relativas a la operativización y concreción de conceptos que han servido para poder categorizar tanto problemas como respuestas. Se trata en definitiva de términos o expresiones que necesitan un ajuste pues su significado cotidiano no satisface las necesidades con que aquí son utilizados.

En el segundo caso, **6.2. Cuadros y tablas utilizados**, pretendemos que su agrupación facilite el seguimiento a quienes quieran observar la evolución de los filtrados y la tabulación de los datos que hemos ido obteniendo a lo largo del trabajo.

6.1 Aclaración de términos

A lo largo del trabajo hemos ido utilizando algunos términos que creemos conveniente describir, definir o precisar. El lenguaje, a veces, permite extensiones o supuestos que pueden llevar a equívocos o vaguedades que pretendemos excluir.

Tal vez sea esta una labor redundante pero preferimos una cierta reiteración o redundancia expositiva a que se generen imprecisiones o vaguedades que desluzcan y empeoren la proyección de nuestras observaciones.

Esta es la lista de tales aclaraciones presentadas por orden más o menos alfabético:

1.– Base6000

Colección originaria de 6000 problemas (600 para cada uno de los 10 cursos de Enseñanza Obligatoria, Primaria y ESO). Es el punto de arranque del presente trabajo. En la tabla **Ho2** se muestran algunos de los campos (los que creemos de más interés para el lector) de la tabla Base6000 con la correspondiente descripción de sus contenidos y cotejamiento. De ella, tras sucesivos filtrados, se excluirán más de la mitad de los problemas por no cumplir, inicialmente, una triple condición.

La primera fue la de tener una frecuencia (haber sido resuelto, bien o mal) un número mínimo de veces.

La segunda, tener una tasa de aciertos significativamente más alta que el promedio (problemas muy fáciles).

La tercera, tener una tasa de aciertos significativamente más baja que el promedio (problemas muy difíciles).

Posteriormente procedimos a eliminar aquellos problemas que no acumulaban un mínimo de cinco veces, es decir con frecuencias inferiores a cinco, lo que significaba que, al menos, existían cinco alumnos que daban la misma respuesta errática al mismo problema.

También eliminamos de esta base original aquellos problemas con errores en la notificación decimal. Existen países, regiones, zonas, escuelas o alumnos que utilizan la coma como decimal y el punto como separador de miles/millones... aunque cada vez es más infrecuente.

2.– Base2486

Después de las tareas de filtrado recién comentadas obtuvimos una tabla notablemente reducida. Por una u otra razón, más de la mitad de los problemas habían sido rechazados, quedándose limitada a 2486.

El trabajo de depuración de Base6000 a Base2486 fue secuencial, pausado, muy lento y laborioso.

En la tabla **H11** se puede ver la comparación de aciertos, errores, totales y los correspondientes tiempos utilizados para cada una de las categorías de los problemas y también para los totales. En el apartado **2.3.3. Depuración: Base2486** se puede hacer un seguimiento más pormenorizado de lo que en este punto comentamos brevemente.

En todo caso el grueso del presente trabajo está realizado tomando como cimiento la tabla depurada que denominamos Base2486, que consta de 2486 problemas que engloban todas las categorías estudiadas repartidas a través de los 10 cursos de Enseñanza Obligatoria, es decir, e 6–7 a 15–16 años.

3.– Bases de datos y tablas

Las bases de datos con las que trabaja **winmates** son de tipo MySQL. La base MySQL recoge las distintas informaciones que proceden del software en distintas tablas creadas *ad hoc*. Es decir, la base de datos está formada por decenas o cientos de tablas, cada una con su función de presentación, de recogida de datos (respuestas, tiempos de ejecución...), control interno, seguridad, etc.

A veces, de una forma confusa, se utiliza incorrectamente el concepto de base de datos a lo que solo es una tabla de la misma, tomando el todo por la parte. Es decir, como si tablas y bases de datos fueran conceptos análogos o sinónimos. Y no lo son.

La razón de este error es que existen otras tablas u hojas (las de Excel, por ejemplo), receptoras de los contenidos de las tablas de la base de datos, que han de ser distinguidas de las primeras, y una manera de hacerlo es denominar a las tablas de la base de datos, bases de datos. Aquí cometemos ese vicio o error de sinonimia que nos permite distinguir unas de otras con bastante frecuencia, y por ello hacemos estos comentarios.

4.– Errores sistemáticos

Denominamos errores sistemáticos aquellos errores no aleatorios que se comenten cuando se resuelve un problema. Al eliminar la componente aleatoria del problema nos quedamos con una respuesta errónea que goza de una cierta estabilidad, es decir, que conlleva una determinada componente de causalidad, o si lo preferimos, existe un mecanismo interno que puede explicar por qué distintos alumnos comenten el mismo error ante el mismo problema o bien (más raro) por qué el mismo sujeto puede cometer una y otra vez el mismo error.

Este tipo de errores tienen su propia lógica, sus propias leyes, sus propios mecanismos y por definición actúan de igual forma (o parecida) en distintos sujetos.

Unas veces se puede encontrar su causa en la falta de maduración, en la

motivación, en el despiste, en la estructura y contenido del texto, y en un largo etc. Aproximarse al comportamiento de los errores sistemáticos de un alumno o de un grupo de ellos puede acercarnos a sus tropiezos, a sus aproximaciones, a sus procesos de pensamiento, etc, y todo ello puede ser muy útil para ayudarlo a mejorar sus aprendizajes, en este caso, matemáticos.

Obviamente, los problemas están dotados de determinados sensores que pueden detectar estos errores sistemáticos. Los textos de los problemas introducen ciertos niveles de ambigüedad calculada que los alumnos han de resolver de forma adecuada para la obtención correcta de la respuesta. No se trata de trampas, ni de sadismo por parte del autor, aunque a veces pudieran parecerlo, sino pequeñas dificultades que ellos han de aprender a superar de forma exitosa, poniéndolos en situaciones que no siempre son lo que parecen, preparándolos para la vida adulta, donde el envoltorio de la realidad no siempre nos viene servido ni de la forma más placentera, ni más simple, ni más sencilla.

También sé lo que es ir contra la corriente del ludismo, buenismo, psicologismo y otros cientos de ismos que tanto han rebajado los niveles de instrucción de nuestros alumnos en el reinado de este pedagogismo de corto plazo en el que estamos instalados, al menos, en el mundo occidental. Y ahí están los resultados, por muy edulcorados que nos los quieran presentar. Para verlos, solo hace falta querer verlos, es decir, quitarse la venda. Tampoco hace falta revisar las pruebas PISA con excesiva profundidad para comprender todo esto que comentamos.

Se pueden ampliar todos estos temas en el punto **4.3. Errores sistemáticos**, que constituyen el núcleo duro del presente trabajo.

5.– Problemas y ejercicios

La diferencia entre problemas y ejercicios ha ocupado muchas discusiones pasadas y seguramente lo seguirá haciendo en el futuro. Para no entrar en debates que bajo nuestro punto de vista no aportan nuevas luces, nos ceñiremos a marcar las diferencias más visibles entre ambos conceptos.

El problema es un enunciado en el que se plantean unos datos y se piden otros. El cálculo de la respuesta exige normalmente relacionar la información de que disponemos, lo que conlleva el análisis y la comprensión del texto que es el soporte de los datos. La dificultad de los problemas está relacionada, sobre todo, con dos aspectos: uno, la dificultad de comprensión del texto o enunciado y dos, la complejidad operatoria que requiere su resolución.

El ejercicio es más bien una propuesta de aplicación secuencial de normas operatorias, que pueden llegar a ser muy complejas, pero que la destreza y habilidad de su uso nos puede llevar al resultado.

Frente a la esencia de los problemas, los ejercicios carecen normalmente de texto escrito por lo cual no son sensibles a las deficiencias en el área del lenguaje o la comunicación, por lo que son mucho más accesibles a los algoritmos y a la computación, que tampoco requieren conocimientos sobre lenguaje natural.

Nosotros trabajamos con problemas, donde se deben de manejar variables de tipo lingüístico y contextuales junto a otras habilidades de tipo aritmético o algorítmico. Todo ello se puede ver ampliado en el punto **1.3. Problemas y ejercicios**.

6.— Resolución de problemas

La RP es un tema que ha ido cobrando importancia al tiempo que los periodos de escolarización obligatoria se van progresivamente ampliando. La obligatoriedad escolar, un gran paso desde el punto de vista de la mejora social y de la igualdad de oportunidades, refleja a veces eventualidades que habría que corregir, pero tal tarea es casi imposible frente a la otra *brunete*, la del relativismo táctico, la del *postureo* moderno, la del *púlpito* televisivo, la que te corta las piernas para poder ofrecerte muletas.

Digo que, tras las ampliaciones de la enseñanza obligatoria, puede tener sentido vincular el aprendizaje de los conocimientos matemáticos básicos a la capacidad de resolver problemas que se planteen la puesta en práctica de tales conocimientos, que han de ser útiles para la vida, para gozar de una cierta autonomía en nuestras relaciones como personas, como ciudadanos dentro de una sociedad más justa.

Seguramente sería más provechoso para nuestros niños y jóvenes, futuros ciudadanos adultos, conocer los entresijos de las facturas la luz o del agua, por ejemplo, que saber hacer raíces cuadradas, pero claro, lo segundo no compromete a nadie y lo primero sí. Hay grandes intereses privados, y también públicos en ello. Mientras todo esto ocurre, nosotros apostamos por la vía RP como vehículo —tal vez el mejor— en el que transportar los contenidos matemáticos básicos del periodo obligatorio de la enseñanza desde el BOE o el libro hasta el alumno.

7.— winmates

winmates.net es muchas cosas a la vez. Por ello trataremos de especificar algunos de sus significados, aunque solo los más usuales. Originariamente significó aprender matemáticas a través de Windows, de ahí *win* por Windows y *mates* por matemáticas. **winmates**: aprender matemáticas a través de Windows, esa ventana informática, significó introducir el ordenador como herramienta de aprendizaje: colecciones ampliables de problemas ordenados por dificultad creciente que recibían respuestas de alumnos que

podían ser analizadas *offline* para observar comportamientos resolutorios. Con Internet, todo esto adquirió una nueva dimensión.

Primero, una web, www.winmates.net, en donde se podían resolver problemas desde cualquier parte del mundo siempre que se tuviera acceso a Internet; y gratuitamente. Más tarde *winmates* fue convirtiéndose en una especie de filosofía, mejor dicho, de metodología de trabajo, para el aprendizaje de las matemáticas curriculares básicas.

Aulas, colegios, particulares y/o familias de aquí y de allá usaban habitualmente *winmates*, por periodos normalmente cortos, pero también sostenidos a lo largo de varios años. Hay que considerar que se trataba de personas e instituciones que compartían lo expuesto en el punto anterior respecto a la RP.

Tras años de trabajo, *winmates* se fue llenando de resultados que iban quedando grabados en las bases de datos del servidor (problemas resueltos, respuestas, tiempos invertido en cada resolución, etc.). El mantenimiento de todo este dispositivo fue muy laborioso y solo daba para que todo siguiera evolucionando al ritmo de que nos exigían la implantación de nuevas tecnologías (lenguajes de programación...) y el mantenimiento de bases de datos funcionando a un ritmo muy alto, fundamentalmente con alumnado de España, Latinoamérica y EE.UU. Tiempo habría de analizar toda la información que se iba produciendo. Y efectivamente, tras mi jubilación decidí meterme en este maremagnum de informaciones enlatadas años atrás, pero susceptibles de aportar alguna utilidad.

Todo el presente trabajo está basado en estas informaciones grabadas que tuvieron su tramo de mayor uso entre los comienzos de los años 90 del siglo pasado hasta el de 2014 en que me jubilé, fecha que puso punto final a la información analizada. Hoy se sigue utilizando *winmates.net*, pero sus reportes ya no están siendo tenidos en cuenta.

6.2 Cuadros y tablas utilizados

La siguiente relación de tablas recoge solouna parte de aquellas que han sido utilizadas y fundamentan la mayoría de nuestras observaciones y comentarios. El orden en que se muestran puede no coincidir con el presentado a lo largo del trabajo. Existen muchas otras tablas que también nos han servido para este trabajo. Algunos de sus campos o informaciones están reflejados en otras y desde ese punto de vista son prescindibles y su presentación no aportaría una información significativa en lo que deseamos transmitir, en las cuestiones que hemos ido tratando.

En la parte inferior de la hoja, debajo de cada tabla y a modo de notas, hay comentarios con aclaraciones relacionadas sobre diferentes los campos de las mismas. Aunque pudieran parecer redundantes, pueden ser útiles para la comprensión de esos conceptos y de las dinámicas que ellos implican. La finalidad no es otra que dar alguna explicación que permita hacer toda esa información numérica más asequible, más comprensible y por tanto más lingüística.

H01. Errores sistemáticos. Un ejemplo

Problema	847
Categoría	Producto
Texto	Pongo cada semana 4 euros en la hucha. ¿Cuántos euros ahorraré en siete semanas?
Respuesta	28
Aciertos	96
Fallos	27
Errores sistemáticos	196:14, 24:10 [respuesta 196 (14 veces), respuesta 24 (10 veces)]
Aclaraciones: <i>. Los errores sistemáticos son aquellas respuestas falladas no explicables por aleatoriedad.</i> <i>. Los errores no sistemáticos, es decir, aleatorios, no están contemplados en este trabajo.</i>	

De cada uno de los problemas tenemos la información que presenta la hoja: Problema, Categoría a la que pertenece, Enunciado del problema, Respuesta correcta, N° de aciertos del problema, N° de errores del mismo y Errores sistemáticos.

Excluimos de estos errores sistemáticos todos aquellos que sean aleatorios o que muestren una frecuencia poco significativa (menor o igual a 5), es decir, aquellos que reflejan fallos en distintas fases de conceptualización, comprensión del enunciado, cálculo resolutorio, etc, que son reproducidos por los distintos alumnos de diferentes sexos, edades y latitudes.

H02. Estructura de Base6000: algunos campos

Campos	Descripción	Cotejamiento
N	Número de Problema	smallint(6)
Cu	Cursos: 6 de Pr y 4 de ESO	varchar(2)
At	Número de veces acertado	smallint(6)
Et	Número de veces fallado	smallint(6)
Ati	Tiempo total para Aciertos	smallint(6)
Eti	Tiempo total para Errores	smallint(6)
Cate	Categoría según operación requerida	varchar(5)
Proble	Texto del problema	varchar(185)
Resp	Respuesta correcta del problema	varchar(10)
Rsmal	Respuestas erróneas introducidas	varchar(255)
DATOS	Datos explícitos del problema	varchar(30)

Aclaraciones:

- . Solo se muestran algunos de los campos de los existentes.
- . Existen otros (respuestas, ayuda, traducciones, etc.) que se ocultan por la escasa relevancia que pueden tener para el lector.

Base6000 es una base de datos con 6000 registros, cada uno con distintos campos que caracterizan el problema. Cada registro contiene la información referenciada en la columna **Campos**. Al lado está la **Descripción del concepto** y en la siguiente columna el tipo de variable del mismo (si es literal, numérico, tamaño, etc.) El campo **N** contiene un número entre 1 y 6000 y refleja la dificultad teórica del problema.

En teoría hay 600 problemas para cada uno de los 10 intervalos o cursos que ocupa nuestra Enseñanza Obligatoria (seis cursos de Primaria más cuatro de ESO). Y cada alumno puede trabajar en un nivel diferente que no tiene por qué coincidir con el que le correspondería según su edad cronológica.

Es el punto de partida del trabajo. Ha sufrido diferentes tareas de filtrado con la finalidad de ir eliminando ruido e informaciones contaminadas o irrelevantes para nuestros objetivos sobre el estudio del error sistemático.

Otras tablas, diseñadas *ad hoc*, eran las receptoras de toda la información que se iba produciendo cuando los alumnos utilizaban *winmates* y que ha sido tenida en cuenta en los procesos de depuración.

H03. Frecuencias por curso y tipo de problema. Base2486

Cu	Nivac	Cate0	Cate1	Cate2	Cate3	Cate4	Cate5	Cate6	Cate7	Cate8	Total Pr
		Noper	Opbas	Varop	Geome	Ecuac	Ppr3	SMD	Multipar	Otro	
1	Pr1	26	155	11					9		201
2	Pr2	66	204	38	1			47	146		502
3	Pr3	90	121	44	13	4	11	78	150		511
4	Pr4	93	69	36	17	16	19	112	104	1	467
5	Pr5	86	42	22	23	27	12	60	60	6	338
6	Pr6	52	15	20	22	26	11	47	48	7	248
7	ESO1	36	11	6	25	14	6	18	17	4	137
8	ESO2	29	7	7	9	3	4	2	7	5	73
9	ESO3	5									5
10	ESO4	2					1		1		4
	Total Pr	485	624	184	110	90	64	364	542	23	2486

Aclaraciones:

H03. Frecuencias por curso y categoría del problema. Base2486 (tabla depurada)

Cu/Nivac 10 Cursos (6 de Primaria -Pr1 a Pr6- y 4 de ESO -ESO1 a ESO4-).

Noper Problemas cuya respuesta no requiere realizar ninguna operación.

Opbas " que requieren realizar alguna operación básica (+, -, *, /)

Varop " que cuya respuesta 'necesita' más de una operación

Geome " con conceptos de Geometría

Ecuac " susceptibles de planteamiento de igualdad entre dos miembros, incógnitas,

Ppr3 " abordables por porcentajes, proporciones o regla de 3

SMD " con manejo eficiente del Sistema Métrico y Decimal (de base 10)

Multipar " con multiplicativos o múltiplos y divisores o partitivos

Otro " con otras categorías distintas de las anteriores

Total Pr " número de problemas de cada categoría

Tras los laboriosos trabajos de limpieza y análisis que hemos comentado en la hoja anterior, se llegó a una tabla llamada Base2486 con 2486 registros. Se habían eliminado 3614 de los 6000 originarios: los demasiado fáciles, los demasiado difíciles, los que no presentaban errores sistemáticos suficientes y los que tenían pocas respuestas (con rangos de dificultad más alta).

La tabla recoge los cursos en las filas y las categorías de problemas en las columnas y las intersecciones de ambas contienen el número de problemas para cada curso y categoría. A la derecha y abajo figura el número total de problemas por curso y por categoría.

Vemos que los dos últimos cursos, 3º y 4º de ESO, apenas tienen muestra de problemas, ya que la mayoría de esos alumnos de cursos elevados carecían del nivel necesario para resolverlos.

H04. Distribución de los problemas por categorías y subcategorías

Cate	CatPro	Descripción de la subcategoría del problema	TotCate	Subcate
Noper (Sin operaciones)	01	Estimaciones cuantificadas de hechos reales o posibles	485	46
	02	Seriaciones. Completar la serie con el n° que falta		84
	03	Respuesta total o parcialmente explícita. No operar (todos) los datos		53
	04	Pide un dato explícito. Capciosa. Comprensión y concentración		89
	05	Redondeo a diferentes tipos de agrupación		7
	06	Nivel de control matemático: leyes, propiedades, conceptos		33
	07	Uso del signo y conceptos de ordenación numérica ($>$, $<$, $=$)		38
	08	Estructura interna del número: cifras, valor relativo, orden...		135
Opbas	11	Suma	624	107
	12	Resta		170
	13	Producto		209
	14	Cociente		138
Varop	20	Requieren más de una operación	184	184
Geom	30	Geometría	110	110
Ecuac	40	Planteamientos (igualdades o ecuaciones...)	90	90
Ppr3	51	Porcentajes	64	5
	52	Repartos proporcionales		5
	53	Regla de 3		54
SMD	61	Operatoria decimal. Uso de decimales	364	224
	62	Sistema métrico. Cambios		54
	63	Medida del tiempo (seg, min, horas...)		86
Multipar	71	Multiplicativos	542	152
	72	Partitivos		355
	73	Fracciones: conceptos y operaciones		35
Otro	81	Probabilidades	23	9
	82	Potencias: concepto y operaciones		14

Las ocho categorías a que hacíamos referencia en el apartado anterior se vuelven a subdividir en otros tipos con la finalidad de establecer diferenciaciones más finas dentro de las primeras.

En la tabla podemos ver cómo se reparten estos grupos dentro de Base2486. La primera columna es la categoría genérica; la segunda, la codificación que utilizamos para referirnos a ella; a continuación la subcategoría, seguida de los totales de la primera columna; y en la última, los subtotales de las subcategorías.

H05. Problemas con desbordamiento de tiempo

N	At	Et	Ati	Eti	Problema	Res
595	1026	127	16514	32767	¿Cuántos euros son 6 billetes de 5 euros cada billete?	30
803	1199	120	32767	5973	Un cartero ha de andar 14 kilómetros. ¿Cuántos le faltan si ya ha andado 9?	5
810	1103	141	32767	9971	Reparte en partes iguales 28 lápices entre 4 niños. ¿Cuántos das a cada uno?	7
1118	1159	142	32767	9341	Una colección de cromos consta de 247 unidades. Tengo 129. ¿Cuántos me faltan?	118
1124	1286	164	32767	6111	Tengo 23 canicas. 8 son de acero. ¿Cuántas no son de acero?	15
1210	984	139	32767	11098	3 libros tienen 1078 hojas. El primero tiene 289, el 2º tiene 456. ¿Cuántas hojas tiene el tercero?	333
1270	1224	146	32767	10206	Cada mes voy 4 veces a por el diario. ¿Cuántas veces voy en 1 trimestre?	12
1339	1144	103	32767	4741	Una empresa tiene 746 empleados pero 94 están de baja. ¿Cuántos trabajan?	652
1357	994	170	32767	10648	9 niños tienen media galleta cada uno. ¿Cuántas galletas tienen entre todos.	4.5
1468	1067	154	32767	11768	Tienes 834 euros y compras 3 cosas de 45 euros cada una. ¿Cuántos euros te quedan?	699
1579	1164	137	32767	7734	Repartí 762 euros en partes iguales entre Juan, Eva y Luis. ¿Cuánto toca a Juan?	254
2164	972	96	25284	32767	¿Cuántos viajeros van en 1 tren de 5 vagones con 5 departamentos por vagón con 5 personas cada departamento?	125

Aclaraciones:

Problemas eliminados por desbordamiento de tiempo

N N° del problema

At Total de aciertos

Et " errores

Ati " tiempo invertido en aciertos (seg)

Eti " " errores "

Problema Enunciado

Comentamos en su momento que se controlaban los tiempos de respuesta en segundos para ver si existen relaciones entre la velocidad de ejecución y las tasas de éxito resolutorio.

Ocurre algunas veces que esos tiempos se alargan porque se demora mucho la respuesta o incluso no se produce. Mientras no se pulsa *Intro* o *Return* no se pone fin al marcador de tiempo. Explicaciones del profesor, tiempos de recreo, charlas con el compañero, etc., pueden ser causa de que los tiempos se agranden artificialmente. Y así ha ocurrido algunas veces.

Aquí mostramos problemas que han sido eliminados porque el tiempo acumulado (en Aciertos o en Errores) ha sido superior a 32767. Recordamos que el entero pequeño o *smallint*(6) tiene un rango de -32768 a 32767 porque así fue definido en la estructura de la base de datos. En ese momento no sabíamos que este número no iba a ser suficiente para cuantificar nuestros propósitos.

H06. Aciertos y errores por tipos de operación. Alumnos registrados. Restanda

	Noper	Opbas	Mul	Ryp	Ecua	Ppr3	SMD	Myd	Geom	Ado	Total
Aciertos	17701	103633	19055	389	6605	4924	19488	65597	7478	374	245244
Errores	5092	25770	6116	147	1824	1674	7527	23543	1930	161	73784
Total	22793	129403	25171	536	8429	6598	27015	89140	9408	535	319028
% Error	22,3	19,9	24,3	27,4	21,6	25,4	27,9	26,4	20,5	30,1	23,1

Aclaraciones:

Basados en alumnos registrados (diagnosticados y seguidos) en winmates.net

Noper Problemas cuya respuesta no requiere realizar ninguna operación.

Opbas " que requieren realizar alguna operación básica (+, -, *, /)

Varop " que cuya respuesta 'necesita' más de una operación

Geome " con conceptos de Geometría

Ecua " con planteamiento de igualdad entre dos miembros, incógnitas, etc

Ppr3 " abordables por porcentajes, proporciones o regla de 3

SMD " con manejo eficiente del Sistema Métrico y Decimal (de base 10)

Multipar " con multiplicativos o múltiplos y divisores o partitivos

Ado " con otras categorías distintas de las anteriores

Total Pr " número de problemas de cada categoría

Presentación de datos sobre aciertos y errores en base a los tipos de problemas. Esta muestra esta tomada partiendo de sujetos registrados que habían sido diagnosticados para evaluar su nivel inicial, cuyos datos se guardan en una tabla llamada **Restanda**.

Además, este grupo de alumnos registrados estaban acompañados generalmente por un adulto en su tiempo de trabajo, padre o profesor, lo que implica mayor vigilancia y mayor dificultad de los problemas, ya que no eran los alumnos quienes elegían la dificultad, sino que winmates, se los iba ofreciendo en base al nivel que cada uno de estos había mostrado en el **Diagnóstico**.

H07. Aciertos, errores y tiempos por tipos de operación. Total alumnos. Base2486

TipOper	Noper	Opbas	Varop	Geom	Ecuac	Ppr3	SMD	Multipar	Otro	TotalProb	Thoras
At	413624	573132	159896	83570	68416	50136	297761	474035	16335	2136905	
Et	52072	60165	18437	7751	6223	5236	38095	54993	1520	244492	
Total	465696	633297	178333	91321	74639	55372	335856	529028	17855	2381397	
100*Et/Tot	11,2	9,5	10,3	8,5	8,3	9,5	11,3	10,4	8,5	10,3	
Ati	5543153	9563530	2809614	999694	860625	762620	4269611	7398094	166005	32372946	8992
Eti	1926773	2542618	921622	248760	245627	239274	1814127	2366818	45739	10351358	2875
Total	7469926	12106148	3731236	1248454	1106252	1001894	6083738	9764912	211744	42724304	11868
T med Ati	13	17	18	12	13	15	14	16	10	15	
T med Eti	37	42	50	32	39	46	48	43	30	42	
T med Tot	16	19	21	14	15	18	18	18	12	18	

Aclaraciones:

Aciertos, fallos y tiempos según categoría del problema. Base2486 (tabla depurada)

Cu/Nivac 10 Cursos (6 de Primaria -Pr1 a Pr6- y 4 de ESO -ESO1 a ESO4-).

Noper Problemas cuya respuesta no requiere realizar ninguna operación.

Opbas " que requieren realizar alguna operación básica (+, -, *, /)

Varop " que cuya respuesta 'necesita' más de una operación

Geom " con conceptos de Geometría

Ecuac " susceptibles de planteamiento de igualdad entre dos miembros, incógnitas, etc

Ppr3 " abordables por porcentajes, proporciones o regla de 3

SMD " con manejo eficiente del Sistema Métrico y Decimal (de base 10)

Multipar " con multiplicativos o múltiplos y divisores o partitivos

Otro " con otras categorías distintas de las anteriores

Total Pr " número de problemas de cada categoría

At Total de aciertos por categoría

Et " errores por categoría

Total " aciertos más errores

100*Et/Tot Dificultad media de los problemas de la categoría

Ati Total de tiempo (seg) en el bloque de aciertos

Eti " " errores

Total " " total de problemas hechos

T med Ati Tiempo medio (seg) en aciertos

T med Eti " " errores

T med Tot " " total problemas (aciertos + errores)

Presentación de datos sobre aciertos y errores en base a los tipos de problemas. La diferencia con la tabla anterior es que el trabajo realizado ahora no viene determinado, sino que es el propio alumno quien puede escoger el nivel en que poder trabajar, aunque a veces era el padre o el tutor quién le facilita un trabajo menos esforzado y mas sencillo.

El alumno actúa más holgado, más relajado, obtiene mejores resultados (medidos en tasa de aciertos) y tarda menos tiempo en resolverlos.

El problema es que al no estar adaptado a su nivel de maduración hacía cosas que ya sabía hacer, se esforzaba lo mínimo y todo eso se traducía en que los niveles de aprendizaje eran significativamente menores.

No hay atajos en el aprendizaje ni se pueden evitar unos ciertos niveles de error que le son intrínsecos. Ponerse de puntillas ayuda a crecer.

H08. Dificultad y tiempos según nivel y/o curso. Base2486

Curso	Pr1	Pr2	Pr3	Pr4	Pr5	Pr6	ESO1	ESO2	ESO3	ESO4	Total
TotProb	201	502	511	467	338	248	137	73	5	4	2486
At	188466	476319	494417	403257	257751	184993	87193	43323	1180	6	2136905
Et	19810	55539	64496	49471	26520	16090	7912	4318	247	89	244492
At+Et	208276	531858	558913	452728	284271	201083	95105	47641	1427	95	2381397
100Er/Tot	9,5	10,4	11,5	10,9	9,3	8	8,3	9,1	17,3	93,7	10,3
Ati	2717165	8094713	8993324	6477953	3136378	1785614	783255	368527	14742	1275	32372946
Eti	719682	2392997	3041568	2320616	1016613	524654	223203	101311	6536	4178	10351358
Ati+Eti	3436847	10487710	12034892	8798569	4152991	2310268	1006458	469838	21278	5453	42724304
T med Ati	14	17	18	16	12	10	9	9	12	213	15
T med Eti	36	43	47	47	38	33	28	23	26	47	42
T med Pr	17	20	22	19	15	11	11	10	15	57	18

Aclaraciones:

Dificultad y tiempos por nivel/curso. Base2486 (depurada y reducida)

Curso Curso o nivel

TotProb Total de Problemas diferentes por curso o nivel

At Aciertos

Et Errores

At+Et Aciertos + Errores (Problemas hechos)

100Er/Tot Dificultad (Errores sobre el total)

Ati Tiempo invertido en aciertos (seg)

Eti Tiempo invertido en errores (seg)

Ati+Eti Tiempo invertido en total problemas (seg)

T med Ati Tiempo medio invertido en cada acierto (seg)

T med Eti Tiempo medio invertido en cada error (seg)

T med Pr Tiempo medio invertido en cada problema hecho (seg)

Aciertos, errores, tiempos y dificultades en la resolución de problemas en referencia a los cursos académicos. Población: totalidad de alumnos (registrados y no registrados).

Cerca de 2400000 problemas hechos en un tiempo totalizado de cerca de 12000 horas de trabajo individual.

La tasa de errores por cada 100 problemas hechos se mueve en torno al 10% mientras que el tiempo medio que necesitan los problemas bien resueltos es de unos 15 segundos, incrementándose a más de 40 cuando los problemas son fallados. Todo ello en alumnos no registrados, es decir, sin diagnóstico ni control adulto a la hora de trabajar.

H09. Aciertos, errores y tiempos. Tabla informa (2998 alumnos registrados)

	Pr1	Pr2	Pr3	Pr4	Pr5	Pr6	Eso1	Eso2	Eso3	Eso4	Totales
T_Aci	356	1642	4246	14343	10290	45217	61172	42040	26896	42926	249128
T_Err	102	492	1353	4651	3394	13555	18702	11899	7673	13326	75147
T_Prob	458	2134	5599	18994	13684	58772	79874	53939	34569	56252	324275
TtAci	18015	103949	247664	711766	495739	1925398	2688704	183742	1226474	1967739	11222872
TtErr	39395	80761	100044	336790	266531	921453	1229986	815209	548687	996270	5335126
TtProb	57410	184710	347708	1048556	762270	2846851	3918690	265263	1775161	2964009	16557998
TtmAci	51	63	58	50	48	43	44	44	46	46	45
TtmErr	386	164	74	72	79	68	66	69	72	75	71
TtmPro	125	87	62	55	56	48	49	49	51	53	51

Aclaraciones:

Sobre los problemas hechos por 2998 alumnos registrados en winmates.net

T_Aci Total de aciertos

T_err " errores

T_Prob " problemas

TtAci Tiempo total (seg) en aciertos

TtErr " errores

TtProb " problemas

TtmAci Tiempo medio (seg) en aciertos

TtmErr " " errores

TtmPro " " problemas

Aciertos, errores, tiempos y dificultades en la resolución de problemas en referencia a los cursos académicos. Población: solo alumnos registrados (2998).

Aunque la tabla no muestra las dificultades de los problemas, estas se pueden obtener, para cada curso, con un sencillo cálculo ($100 \times T_err / T_Prob$). Con ligeras variaciones, dichos errores se sitúan entre el 22% para 1º de Primaria (mínimo) y un 25% para 5º (máximo). Es decir, los alumnos registrados tienen una tasa superior de errores que los alumnos no registrados, que se sitúa en torno al 10%.

Este hecho no es una incoherencia. La explicación es que los alumnos registrados y más o menos tutorizados durante su trabajo están haciendo los problemas que les presenta winmates de acuerdo a su nivel de maduración, y comparados con el resto, donde los propios alumnos eligen la dificultad de los problemas que van a resolver.

Respecto al análisis de los tiempos, los alumnos registrados dedican más tiempo a la resolución de los problemas (triple en los acertados y doble en los fallados).

Vemos la diferencia palpable de trabajar con un nivel adecuado de dificultad. Hacer problemas no es lo mismo que hacer problemas que sitúen su dificultad en el punto en el que tu vas aprendiendo. Ciertamente, se fallan más, y se le dedican más tiempo. Es decir, los alumnos piensan más, tardan más tiempo, cometen más errores y también aprenden más.

H10. Aciertos, errores y tiempos por categorías. Base6000/Base2486

Tabl	Pr/tie	Noper	Opbas	Varop	Geome	Ecuac	Ppr3	SMD	Multipar	Otro	Total	Tie
Base6000	At	568609	1177189	321363	234018	257219	136365	468440	735435	51549	3950187	14
	Et	66511	106544	31594	20300	23516	13630	51997	75123	5004	394219	37
	At+Et	635120	1283733	352957	254318	280735	149995	520437	810558	56553	4344406	
	Ati	7275913	17196144	4841579	2489967	3018171	1789978	6093230	10391953	523274	53620209	
	Eti	2331094	3866468	1363351	514419	687453	463321	2227445	2887097	122025	14462673	
	Ati+Eti	9607007	21062612	6204930	3004386	3705624	2253299	8320675	13279050	645299	68082882	16
Base2486	At	413624	573132	159896	83570	68416	50136	297761	474035	16335	2136905	15
	Et	52072	60165	18437	7751	6223	5236	38095	54993	1520	244492	42
	At+Et	465696	633297	178333	91321	74639	55372	335856	529028	17855	2381397	
	Ati	5543153	9563530	2809614	999694	860625	762620	4269611	7398094	166005	32372946	
	Eti	1926773	2542618	921622	248760	245627	239274	1814127	2366818	45739	10351358	
	Ati+Eti	7469926	12106148	3731236	1248454	1106252	1001894	6083738	9764912	211744	42724304	18

Aclaraciones:

Aciertos, errores y tiempos por categorías. Base6000 / Base2486. Comparación

Base6000 Colección original (6000 problemas)

Base2486 Colección depurada (2486 problemas)

At Aciertos totales

Et Errores totales

At+Et Problemas hechos

Ati Tiempo en aciertos (seg)

Eti Tiempo en errores (seg)

Ati+Eti Tiempo en total problemas (seg)

Comparación aciertos, errores y tiempos entre la base originaria (Base6000) y la depurada (Base2486).

Como puede verse, la poda llevada a cabo en el proceso de limpieza y eliminación de ruido no ha cambiado significativamente los tiempos de dedicación a la obtención de la respuesta.

Se han aumentado ligeramente los tiempos, sobre todo en los errores, pero de forma asumible.

H11. Longitud de texto en caracteres

Long Problema	Nº Probl	Aciertos	Errores	Totales	Dif. media
<i>Cortos (<71)</i>	<i>1248</i>	<i>1091951</i>	<i>126339</i>	<i>1218290</i>	<i>10</i>
<i>Largos (>=71)</i>	<i>1238</i>	<i>1044954</i>	<i>118153</i>	<i>1163107</i>	<i>10</i>
<i>Long<=52</i>	<i>611</i>	<i>532944</i>	<i>60395</i>	<i>593339</i>	<i>10</i>
<i>52<Long<=71</i>	<i>637</i>	<i>559007</i>	<i>65944</i>	<i>624951</i>	<i>11</i>
<i>71<Long<=83</i>	<i>630</i>	<i>547466</i>	<i>64522</i>	<i>611988</i>	<i>11</i>
<i>Long>83</i>	<i>608</i>	<i>497488</i>	<i>53631</i>	<i>551119</i>	<i>10</i>
<i>Total</i>	<i>2486</i>	<i>2136905</i>	<i>244492</i>	<i>2381397</i>	<i>10</i>

Aclaraciones:

Aciertos y errores según la longitud del enunciado

Cortos (<71) En caracteres

Largos (>=71) "

Long<=52 "

52<Long<=71 "

71<Long<=83 "

Long>83 "

Total Totales

Dif. media Dificultad media por categorías

Quisimos ver si existía relación entre la longitud del problema (medido en caracteres) y la dificultad de los problemas.

Vemos que las dificultades medias para los diferentes intervalos de caracteres son 10, con la excepción de un 11, que no es significativa. Es decir, no existen diferencias de dificultad por la longitud del texto tal como nosotros lo hemos operativizado.

En la tabla de la página derecha se ordenan los problemas, no según la categoría de su enunciado, sino según la categoría de la respuesta dada.

En la primera columna se muestra el concepto, la segunda una subcategoría codificada de ese concepto. A continuación, la descripción y la explicación, Dif (dificultad), Tac (tiempo en aciertos), Ter (tiempo en errores), Ttot (tiempo total), todos ellos promedio de la subcategoría, Subt (problemas de cada subcategoría) y Total (problemas por categoría).

H12. Categorización de errores en la respuesta: dificultades, tiempos y frecuencias

Concepto	Obs	Descripción	Explicación	Dif	Tac	Ter	Ttot	Subt	Total
Distractores	dis1	Datos ocultos y en letra	Pedir datos directo o literales	9	13	32	15	17	246
	dis2	Pregunta capciosa	Conceptos o situaciones engañosas	11	15	42	18	89	
	dis3	Confusores	Suma/resta, r/s, p/c, c/p	8	15	38	17	33	
	dis4	Presión primer dato	Presión del primer dato en la respuesta	9	16	39	18	65	
	dis5	Presión último dato	Presión del último dato en la respuesta	9	17	44	20	42	
Errores de concepto	edc1	Conceptos cotidianos	Docena, par, semana...	11	15	42	18	267	574
	edc2	Seriaciones	Calcular el término que falta en la serie	9	13	34	15	116	
	edc3	Uso de signos	Uso de mayor, menor o igual ($<$, $>$, $=$)	12	13	38	16	69	
	edc4	Propiedades y operaciones	Asociativa, conmutativa y distributiva	10	13	32	15	35	
	edc5	Fracciones	Concepto, términos, operatoria	9	12	35	14	39	
	edc6	Otros conceptos	Sumando, dividendo, redondeo, raíz...	11	10	32	13	48	
Errores en operaciones básicas	eob1	Suma	Errores en la suma (Tipo $0.57+0.3=0.6$)	9	18	39	19	32	284
	eob2	Resta	Errores de cálculo en la resta	10	20	49	23	70	
	eob3	Producto	Errores de cálculo en el producto	9	17	56	21	40	
	eob4	Cociente	Errores de cálculo en el cociente	9	17	43	20	23	
	eob5	Conmutatividad errónea	Minuendo/sustra..., dividendo/...sor	10	13	38	16	25	
	eob6	Descolocación de cifras	Colocación incorrecta de las cifras	10	16	45	19	65	
	eob7	Decimal/entero	Dificultades para usar decimales	12	20	56	24	29	
Fallo en operación utilizada	fou1	+ en vez de -	+ en vez de -	9	17	42	19	42	405
	fou2	- en vez de +	- en vez de +	10	17	41	19	43	
	fou3	* en vez de /	* en vez de /	10	19	49	22	55	
	fou4	/ en vez de *	/ en vez de *	9	17	40	19	27	
	fou5	+ en vez de *	+ en vez de *	9	17	39	19	32	
	fou6	- en vez de * o /	- en vez de * o /	9	16	44	19	13	
	fou7	Eliminar operaciones	Evitar operaciones más dificultosas	10	17	49	20	99	
	fou8	Añadir operaciones	Operar hasta usar todos los datos	11	17	48	20	94	
Geometría	geo1	Punto, recta, plano, ángulo	Punto, recta, plano y ángulos	8	11	32	13	41	119
	geo2	Figuras planas y cuerpos	Figuras planas y cuerpos	9	12	31	14	78	
Lógica	logi	Lógica	Lógica	10	13	35	15	51	51
Multiplicativos y partitivos	mp01	Doble. (Multiplicativo)	Doble. (Multiplicativo)	9	15	37	17	41	475
	mp02	Triple	Triple	9	16	38	18	27	
	mp03	Otros, "veces"...	Otros, "veces"...	9	15	37	17	53	
	mp11	Mitad o medio. (Partitivo)	Mitad o medio. (Partitivo)	11	15	42	18	171	
	mp12	Tercio	Tercio	10	16	40	18	51	
	mp13	Cuarto	Cuarto	11	16	51	20	101	
SM y D	mp14	Otros (quinto sexto...)	Otros (quinto, sexto...)	11	16	45	19	31	332
	smd1	Longitud	Longitud	10	13	52	17	43	
	smd2	Peso	Peso	14	17	83	26	14	
	smd3	Volumen	Volumen	11	13	51	17	19	
	smd4	Sistema numérico decimal	Sistema numérico decimal	12	13	41	17	256	
Total								2486	2486

Aclaraciones:

Categorías del tipo de problemas: nombre, tipificación, descripción/explicación, frecuencias y subtotales

H13. Problemas de diagnóstico

N.Pr	Texto del problema	Resp	Tip_Pr
1	¿Cuánto es el doble de 12?	24	OPB
2	Tengo que hacer 23 cuentas. Ayer hice 7 y hoy otras 15. ¿Cuántas cuentas me faltan por hacer?	1	OPM
3	Un señor ha de andar 46 km. ¿Cuántos le faltan si ya ha andado 19 km?	27	OPB
4	¿Cuántas mitades de pastel formaré con 16 pasteles enteros?	32	M
5	Compro 12 rotuladores de color de 2,5 euros cada uno y un lapicero de 0,25 euros. ¿Cuántos euros pagaré por cada uno de los rotuladores?	2.5	PEG
6	¿Cuánto valdrá la Y para que sea verdad que $9 + Y$ es igual a 15?	6	X
7	¿Cuánto es la tercera parte de 42?	14	OPB
8	En un ramo de flores, yo puse 14, Ana la mitad que yo y Eva 5. ¿Cuántas flores hemos puesto las tres?	26	OPM
9	Tengo 20 cajas y en cada una de ellas hay $\frac{1}{4}$ de pizza. ¿Cuántas pizzas enteras podré formar con los cuartos de todas las cajas?	5	OPF
10	¿Cuántos botones son diez decenas y media de botones?	105	M
11	¿Cuántos cuartos de hora habrá en cinco horas menos cuarto?	19	OPF
12	¿Cuántos días durarán en mi casa 7,2 kg. de pan si cada día comemos 0,9 kg?	8	OPB
13	Reparto 45 folios en partes iguales a los 15 alumnos de clase. ¿Cuántos folios tendré si junto de nuevo los folios de los 15 alumnos?	45	PEG
14	La proporción 1 de cada 5 equivale a ¿qué porcentaje?	20	PP
15	Quiero comprar una cosa de 0,27 euros, otra cosa de 0,16 euros y me han de sobrar 0,5 euros. ¿Cuánto dinero necesito en total?	0.93	OPM
16	¿Cuánto son las dos cuartas partes de un tercio de 60?	10	OPF
17	¿Cuántas decenas de huevos son 10 cajas de 6 huevos cada una?	6	M
18	¿Cuál es el resultado de dividir 95,95 entre 3,8?	25.25	OPB
19	¿Cuántos metros hay en 30 milímetros?	0.03	M
20	¿Cuántos minutos hay exactamente en cinco días y medio?	7920	M
21	¿Por qué número hemos de sustituir la X en las siguientes fracciones equivalentes: $X / 4 = 9 / X$.	6	X
22	Halla el volumen de un prisma que tiene de 10 cm. de ancho; 2,5 cm. de alto y 3 cm. de largo.	75	G
23	¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo de 4 m. de alto y 120 dm. de base?	24	G
24	Un librero compra un libro por 7,8 euros y lo vende por 9,2 euros. ¿Cuántos euros ganará vendiendo 5 decenas de esos mismos libros?	70	PP
25	Hoy han faltado 3 alumnos a clase y han venido el resto, que son los $\frac{8}{10}$. ¿Cuántos alumnos tiene la clase cuando no hay ninguno ausente?	15	PP
26	¿Cuánto es el 5% del 40% de 2500 euros?	50	PP
27	¿Cuántos metros cuadrados mide el área de un círculo de diámetro 400 dm?	1256	G
28	¿Cuál es el resultado de $\frac{9}{4} - \frac{6}{3}$? Expresa el resultado en decimal.	0.25	OPF
29	¿Qué nº irá en lugar de la incógnita X? $[12 * (X - 2)] / 6 = 12$.	8	X
30	¿Qué porcentaje me descontaron en unos pantalones que costaban 65 euros y me rebajaron 7.8 euros?	12	PP

Se trata de la lista de los 30 problemas que fueron utilizados como diagnóstico para registrar a los alumnos en winmates. Los problemas, ordenados por dificultad creciente, reflejan la dificultad de Base6000 de forma que de los logros en esta prueba se extrae un puntero donde poder trabajar en winmates.

Las dos columnas de la derecha Resp (respuesta) y Tip pb (tipo de problemas), nos ayudan a redondear el perfil cognitivo del alumno diagnosticado, que puede ser contrastado posteriormente para ver la evolución del sujeto.

H14. Informe diagnóstico (un supuesto)

Resultados Diagnóstico. NOMBRE SIMULADO PEREZ

- . Ejercicios resueltos: 5 acertados y 3 fallados.
- . Curso Escolar por edad: 10
- . Nivel Madurativo obtenido: 2 (2°Pr.)
- . En una escala de 1 a 100 [Escolaridad Obligatoria] el nivel es de 17
- . Se aprecia una maduración normal o análoga a su grupo de edad.

Muy Importante

- . Los datos de acceso a Winmates, son estos:
- . Usuario: NSP10AOC
- . Password: 562889
- . ¡ Cópialos y tenlos a mano para entrar entrar como Usuario.!

A c e p t a r

Esta es la respuesta que da winmates tras la realización del Diagnóstico. Informa de los resultados, del nivel madurativo en base a esos resultados de la prueba, y una pequeña inferencia que relaciona el nivel cognitivo con la edad cronológica.

Asimismo se muestra en pantalla el nombre de usuario de winmates y la contraseña que son necesarios para trabajar como usuario registrado en winmates. Normalmente son los padres o profesores (sobre todo con los alumnos de menor edad) los que controlan esta información.

H15. Categorías de respuesta: tiempos, dificultad y rapidez

Categ	Explicación	Tot_seg	Aci_seg	Err_seg	Dif	Rap_T	Rap_A	Rap_E
dis	Distractores	17,5	15,3	39	9,4	17,6	15,2	39
edc	Conceptos erróneos	15,1	12,8	35,5	10,4	15,2	12,7	35,5
eob	Errores en op. básicas	20,2	17,3	46,6	9,9	20,3	17,3	46,6
fou	Confusión de operación	19,5	16,9	44,1	9,4	19,6	17,1	44
geo	Geometría	13,3	11,6	31,4	8,6	13,5	11,5	31,5
logi	Lógica	15,5	13,3	35,3	9,9	15	13	35
mp0	Multiplicativos	17,1	15	37,6	9,1	17,3	15,3	37,3
mp1	Partitivos	18,7	15,6	44,5	10,7	18,8	15,8	44,5
mp	Multiplicativos y partitivos	18	15,3	41,6	10	18,1	15,6	41,4
smd	Sistema métrico decimal	19	14,8	51,7	11,1	19,1	14,9	51,9

Aclaraciones:

Dificultad y velocidad (tiempos) según la categoría de respuesta.

Filas: categ, explicacion, tiempo medio (seg), id.aciertos, id.errores, dificultad, rapidez total (seg), id.aciertos, id.errores

Categorías de respuesta con los tiempos totales, aciertos, errores, dificultad y tiempos de ejecución.

H16. Subcategorías de respuesta: datos, tiempos, dificultad y rapidez

Obs	count	avg(cu)	sum(At)	sum(Et)	sum(Ati)	sum(Eti)	Tot_seg	Ac_i_seg	Err_seg	Dif	Rap_T	Rap_A	Rap_E
dis1	17	4,4	13707	1288	176968	41851	14,6	12,9	32,5	9	15	13	32
dis2	89	3,1	81128	10257	1231747	433734	18,2	15,2	42,3	11	18	15	42
dis3	30	4,6	24887	2307	372980	86575	16,9	15	37,5	8	17	15	38
dis4	65	2,2	60528	6202	958368	240587	18	15,8	38,8	9	18	16	39
dis5	42	2,4	40078	4065	695857	178331	19,8	17,4	43,9	9	20	17	44
edc1	267	3,5	230660	29194	3521351	1239998	18,3	15,3	42,5	11	18	15	42
edc2	116	4,3	101480	10609	1305012	362060	14,9	12,9	34,1	9	15	13	34
edc3	69	4,1	59915	7963	794985	300255	16,1	13,3	37,7	12	16	13	38
edc4	35	5,5	28018	2972	358350	93822	14,6	12,8	31,6	10	15	13	32
edc5	39	5,5	29591	3018	355190	105054	14,1	12	34,8	9	14	12	35
edc6	48	5,5	34947	4319	355268	140101	12,6	10,2	32,4	11	13	10	32
eob1	32	2,8	29341	2817	514575	109078	19,4	17,5	38,7	9	19	18	39
eob2	70	2,2	66403	7196	1348038	351360	23,1	20,3	48,8	10	23	20	49
eob3	40	3,6	35765	3690	610244	207052	20,7	17,1	56,1	9	21	17	56
eob4	23	4,1	20524	2043	357664	88738	19,8	17,4	43,4	9	20	17	43
eob5	25	5,2	19433	2225	257696	85348	15,8	13,3	38,4	10	16	13	38
eob6	65	4,2	54865	6340	858124	282689	18,6	15,6	44,6	10	19	16	45
eob7	29	2,7	26208	3410	517531	190449	23,9	19,7	55,9	12	24	20	56
fou1	42	2,4	38763	4052	643954	170072	19	16,6	42	9	19	17	42
fou2	46	2,5	41658	4407	698217	180482	19,1	16,8	41	10	19	17	41
fou3	55	3,1	51087	5503	956687	267901	21,6	18,7	48,7	10	22	19	49
fou4	27	3,4	24488	2401	409814	96719	18,8	16,7	40,3	9	19	17	40
fou5	32	2,3	29967	2901	500555	112414	18,6	16,7	38,8	9	19	17	39
fou6	13	2,8	12270	1174	197989	51854	18,6	16,1	44,2	9	19	16	44
fou7	99	3,9	83636	8825	1408222	436597	20	16,8	49,5	10	20	17	49
fou8	94	3,7	82443	9914	1401265	477607	20,3	17	48,2	11	20	17	48
geo1	41	5,6	30394	2774	338675	88624	12,9	11,1	31,9	8	13	11	32
geo2	78	5,7	57715	5495	690015	169695	13,6	12	30,9	9	14	12	31
logi	51	5,7	37360	4095	496658	144507	15,5	13,3	35,3	10	15	13	35
mp01	41	2,8	37425	3776	548860	141489	16,8	14,7	37,5	9	17	15	37
mp02	27	2,9	25830	2493	404509	94835	17,6	15,7	38	9	18	16	38
mp03	53	2,5	48064	4989	704046	186028	16,8	14,6	37,3	9	17	15	37
mp11	171	3,6	148530	17622	2217366	743863	17,8	14,9	42,2	11	18	15	42
mp12	51	3,6	45395	5125	718378	206419	18,3	15,8	40,3	10	18	16	40
mp13	101	3,9	87796	10800	1398706	547880	19,7	15,9	50,7	11	20	16	51
mp14	31	4,2	26914	3288	424121	147745	18,9	15,8	44,9	11	19	16	45
smd1	43	5,2	32.876	3668	423.522	191787	16,8	12,9	52,3	10	17	13	52
smd2	14	4,6	10533	1691	174885	139799	25,7	16,6	82,7	14	26	17	83
smd3	19	5,2	13.865	1645	179.743	83185	17	13	50,6	11	17	13	51
smd4	256	4,1	212418	27939	2846811	1134774	16,6	13,4	40,6	12	17	13	41
Total	2486												

Aclaraciones:

Dificultad y velocidad (tiempos) según las subcategorías de respuesta. Datos directos e inferidos.

En la hoja H12 y H25 se definen y explican los conceptos contenidos en la columna Obs.

Filas: concepto, contador, curso medio, total aciertos, id.errores, tiempo en aciertos, iden en errores,

Subcategorías de respuesta con los tiempos totales, aciertos, errores, dificultad y tiempos de ejecución. Se adjuntan también las columnas count, avg (cu), sum (At), sum (Et), sum (Ati), sum (Eti), que se corresponden respectivamente con el número de problemas, media del curso, los totales de aciertos, errores, tiempo invertido en aciertos y de tiempo invertido en errores, todos ellos medidos en segundos.

H17. Categorización de errores en la respuesta

	Obs	Descripción	Explicación	Frec.
Distractores	dis1	Datos ocultos	Pedir solamente un dato directo	8
	dis2	Datos en letra	Dos, tres, cuatro...	10
	dis3	Pregunta capciosa	Se nombra un concepto contrario a la operación a realizar	89
	dis4	Presión primer dato	Presión del primer dato sobre la respuesta	66
	dis5	Presión último dato	Presión del último dato sobre la respuesta	43
Conceptos erróneos	edc1	Conceptos cotidianos	Docena, par, semana...	235
	edc2	Seriaciones	Calcula el término que falta en la serie	130
	edc3	Uso de signos	Uso de mayor, menor o igual (<, >, =)	68
	edc4	Conceptos varios	Sumando, dividiendo, denominador, redondeo, raíz, potencia	48
	edc5	Propiedades y operaciones	Asociativa, conmutativa y distributiva	31
	edc6	Fracciones	Concepto, términos, operatoria	30
	edc7	Otros	Probabilidad, proporciones, tiempo, base 10 / base 60	33
	edc8	Confusores	Suma/resta, r/s, p/c, c/p	15
Errores de cálculo	eob1	Suma	Errores en la suma y tipo: $0.567+0.3=0.6$	31
	eob2	Resta	Errores de cálculo en la resta	66
	eob3	Producto	Errores de cálculo en el producto	40
	eob4	Cociente	Errores de cálculo en el cociente	22
	eob5	Conmutatividad errónea	Invertir minuendo-sustraendo o dividendo-divisor.	25
	eob6	Descolocación cifras	No respetar el valor relativo en la colocación de la cifras.	8
	eob7	Decimal/entero	Dificultades para expresar resultados decimales	62
	eob8	Muy rara	Diferentes a las subcategorías previas	29
Errores en operaciones	fou1	+ en vez de -	+ en vez de -	48
	fou2	- en vez de +	- en vez de -	49
	fou3	* en vez de /	* en vez de /	59
	fou4	/ en vez de *	/ en vez de *	28
	fou5	+ en vez de *	+ en vez de *	31
	fou6	- en vez de * o /	- en vez de * o /	13
	fou7	Eliminar operaciones	Eliminar operaciones (generalmente más difíciles)	99
	fou8	Añadir operaciones	Añadir operaciones hasta utilizar todos los datos	57
Geometría	fou9	Varios	Sustituir dos o más operaciones en un problema	39
	geo1	Punto, recta, plano y ángulos	Punto, recta, plano y ángulos	41
	geo2	Figuras planas y cuerpos	Figuras planas y cuerpos	78
Lógica	log1	Lógica	Lógica	48
Multiplicativos y partitivos	mp01	Doble. (Multiplicativo)	Doble. (Multiplicativo)	41
	mp02	Triple	Triple	27
	mp03	Otros, "veces"...	Otros, "veces"...	53
	mp11	Mitad o medio. (Partitivo)	Mitad o medio. (Partitivo)	171
	mp12	Tercio	Tercio	51
	mp13	Cuarto	Cuarto	101
	mp14	Quinto	Quinto	16
	mp15	Otros ("veces", sexto...)	Otros ("veces", sexto...)	15
SM y D	smd1	Longitud	Longitud	43
	smd2	Peso	Peso	14
	smd3	Volumen	Volumen	19
	smd4	Sistema numérico decimal	Sistema numérico decimal	256
				2486

Categorías y subcategorías de respuesta con la codificación, descripción, explicación y el número de problemas que contiene cada una de ellas.

7. Bibliografía

- BRAVO SALINAS, Néstor H. *Pedagogía problemática. Acerca de los nuevos paradigmas en educación*. Convenio Andrés Bello. 1997.
- DESCARTE, R.(1952). *Rules for direction of the mind discourse of meted* (E.J. Hal Dane & G.R.I. Ross, Trans.). In Great Books of the Western World (vol.31). Chicago: Encyclopedia Britannica.
- GERDNER, H. (1985). *The minds new science*. New York: Basic Books.
- HALMOS, P.R. (1980). The heart of mathematics. American Mathematical Monthly, 87pp. 519–524.
- KITCHER, P. (1983). *The nature of mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press.
- KLEINER, I. (1986). Famous problems in mathematics: An outline of a course. For the learning of Mathematics, 6(1), pp. 31–38.
- KLINE, M. (1980). *Mathematics, the loss of certainty*, Oxford University Press.
- LAKATOS, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- MATEMÁTICA, Enciclopedia Microsoft® Encarta® 98 © 1993–1997 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.
- MELZAK, Z.A. (1983). *Bypasses: A simple approach to complexity*. New York: John Wiley & Sons.
- MORIN, Edgar. *El conocimiento del conocimiento*. El Método Volumen 3. Ediciones cátedra. 1994
- SANTOS, Manuel. *Resolución de problemas. El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas*. En revista Educación Matemática. Vol 4, Número 2, México D. F., Grupo Editorial Ibero América, S. A. 1992.
- G. H. WHEATLEY: *What you do when you don't know what to do*. En Problem solving in school mathematics, (MEPS Technical Report No. 84.01), West Lafayette, Indiana, Purdue University, School of Mathematics and Science Center, 1984, p. 1.

El Error. El problema de los problemas trata del seguimiento de los errores que cometen alumnos de Primaria y ESO en la resolución de problemas (RP). Estos problemas son enunciados textuales que solicitan una respuesta que puede ser acertada o errónea, se clasifican dentro de una amplia red de categorías, y son analizadas desde diferentes perspectivas según su tipología.

Las respuestas, almacenadas en bases de datos, es la información que estudiamos en este trabajo: respuestas de miles de alumnos, tras miles de horas de trabajo, con millones de respuestas y tiempos de ejecución; es una documentada radiografía de los errores sistemáticos cometidos por alumnos de enseñanza obligatoria (de 6 a 16 años). En ella se observan errores sistemáticos idénticos, dados por alumnos distintos y distantes, en los que se aprecian patrones que conducen al mismo error y ofrecen pistas sobre los procesos erráticos del pensamiento ante la RP.

No es un libro para alumnos, sino para profesores y padres preocupados por las dificultades que la RP genera en alumnos e hijos. Las causas de estas dificultades tienen su origen en la falta de comprensión lectora, de pobreza o imprecisión léxica, y, cómo no, lingüísticas y de falta de concentración.

Problemas psicomatemáticos en los que el lenguaje, que debía de ser un puente entre pensamiento y simbolización, actúa más bien como freno por los serios déficits léxicos (de vocabulario), semánticos (de significado), sintácticos (de relación)...

Un análisis de los errores en
la resolución de problemas,
basado en las respuestas en
la web educativa winmates.net
obtenidas por miles de
alumnos de 6 a 16 años en
decenas de miles de horas
de trabajo sobre millones de
problemas psicomatemáticos.



9 788409 771004